Teorema de Baire para espacios métricos completos

Agradezco a Carlos Fernando Bermúdez Torres por corregir un error en estos apuntes.

Objetivos. Introducir el concepto de espacios de Baire y demostrar el teorema de Baire para espacios métricos completos.

Prerrequisitos. Bolas abiertas y cerradas en espacios métricos, criterio de espacios métricos completos en términos de sucesiones anidadas de conjuntos.

Aplicaciones. Algunos teoremas fundamentales sobre espacios de Banach, incluso el principio de acotación uniforme y el teorema de la transformación lineal abierta.

1 Definición. Sea (X,τ) un espacio topológico. Un subconjunto Y de X se llama *denso* (en X) si $\operatorname{cl}(Y) = X$.

2 Proposición. *Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Entonces Y es denso si y sólo si para cualquier A en $\tau \setminus \{\varnothing\}$, la intersección $A \cap Y$ es no vacía.*

Demostración. 1. Supongamos que Y es denso. Sea $A \in \tau \setminus \{\varnothing\}$ y sea $a \in A$. Entonces $A \in \tau_a$. Como $\operatorname{cl}(Y) = X$ y $a \in X$, $A \cap Y \neq \varnothing$.

2. Supongamos que $A \cap Y \neq \varnothing$ para cualquier A en $\tau \setminus \{\varnothing\}$. Vamos a demostrar que Y es denso. Sea $x \in X$ y sea $A \in \tau_x$. Entonces, por la suposición, $A \cap Y \neq \varnothing$. Esto significa que $x \in \operatorname{cl}(Y)$. $\square$

3 Definición. Un espacio topológico X se llama *espacio de Baire* si para cualquier sucesión $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de X, abiertos y densos, su intersección $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k$ también es densa.

Hay dos teoremas de Baire. El primero dice que todos los espacios métricos completos son de Baire. El segundo dice que todos los espacios de Hausdorff localmente compactos son de Baire. En estos apuntes demostramos solamente el primero de estos dos teoremas. Si (X,d) es un espacio métrico, $x \in X$, $r > 0$, entonces ponemos

$$B(x,r) \coloneqq \{y \in X\colon\ d(x,y) < r\}, \qquad C(x,r) \coloneqq \{y \in X\colon\ d(x,y) \le r\}.$$

4 Lema. *Sean X un espacio métrico, A un subconjunto abierto de X, $a \in A$ y $R > 0$. Entonces existe r tal que $0 < r \le R$ y $C(a,r) \subseteq A$.*

Demostración. Como A es abierto y $a \in A$, elegimos $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subseteq A$. Pongamos

$$r := \min \{R, \delta/2\}.$$

Entonces $0 < r \leq R$ y $r < \delta$. Mostremos que $C(a, r) \subseteq A$. Si $x \in C(a, r)$, entonces $d(x, a) \leq r < \delta$, así que $x \in B(a, R)$ y $x \in A$. $\square$

Recordemos una propiedad importante de espacios métricos (en realidad, es una condición necesaria y suficiente).

5 Proposición (sobre una sucesión anidada de subconjuntos cerrados no vacíos, cuyos diámetros tienden a cero, repaso)**.** *Sea X un espacio métrico completo y sea $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos cerrados no vacíos tal que para cada n en $\mathbb{N}$ se cumple $G_{n+1} \subseteq G_n$ y $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(G_n) = 0$. Entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n \neq \varnothing$.*

6 Teorema. *Cada espacio métrico completo es un espacio de Baire.*

Demostración. Sean (X, d) un espacio métrico completo, $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X, abiertos y densos, y $V = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k$. Sea A un subconjunto abierto de X, $A \neq \varnothing$. Vamos a demostrar que $A \cap V \neq \varnothing$.

Construiremos una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en X y una sucesión $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $(0, +\infty)$.

Como A es abierto y U_1 es denso, $A \cap U_1 \neq \varnothing$. Elegimos $x_1 \in A \cap U_1$. Como $A \cap U_1$ es abierto, aplicamos Lema 4 y encontramos r_1 en $(0, 1]$ tal que $C(x_1, r_1) \subseteq A \cap U_1$.

Para cada k en $\mathbb{N}$, $k \geq 2$, suponiendo que x_j y r_j con $j < k$ ya están elegidos, eligiremos x_k y r_k de la siguiente manera. Como U_k es denso y $B(x_{k-1}, r_{k-1})$ es abierto, $U_k \cap B(x_{k-1}, r_{k-1}) \neq \varnothing$. Elegimos $x_k \in U_k \cap B(x_{k-1}, r_{k-1})$. Usando el Lema 4 y el hecho que el conjunto $U_k \cap B(x_{k-1}, r_{k-1})$ es abierto, encontramos r_k tal que $0 < r_k \leq 1/k$ y $C(x_k, r_k) \subset U_k \cap B(x_{k-1}, r_{k-1})$.

Notamos que $(C(x_k, r_k))_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados y no vacíos. Además, $\operatorname{diam}(C(x_k, r_k)) \leq 2r_k$, así que $\operatorname{diam}(C(x_k, r_k))$ tiende a 0 cuando k tiende a ∞. Usando la suposición que X es completo y aplicando la Proposición 5, encontramos y tal que $y \in C(x_k, r_k)$ para cada k en $\mathbb{N}$.

Como $C(x_1, r_1) \subseteq A$, obtenemos que $y \in A$.

Además, como $C(x_k, r_k) \subseteq U_k$ para cada k en $\mathbb{N}$, hemos demostrado que $y \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k$. $\square$

7 Definición (conjunto denso en ninguna parte)**.** Sea X un espacio topológico y sea Y un subconjunto de X. Se dice que Y es *denso en ninguna parte*, si el interior de su cerradura es vacío.

8 Definición (conjunto magro)**.** Sea X un espacio topológico y sea Y un subconjunto de X. Se dice que Y es *magro* (o *conjunto de la primera categoría*) si existe una sucesión $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de conjuntos densos en ninguna parte tal que $Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$. Los conjuntos no magros también se llaman *conjuntos de la segunda categoría.*

9 Proposición (criterio de espacio de Baire)**.** *Sea X un espacio topológico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) X es de Baire, esto es, para cualquier sucesión $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de X, abiertos y densos, su intersección $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k$ también es densa;

(b) cualquier subconjunto magro de X tiene interior vacío, esto es, para cualquier sucesión $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de conjuntos densos en ninguna parte, el interior de su unión $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ es vacía.

Demostración. Idea de demostración: aplicar las fórmulas de De Morgan y la fórmula $X \setminus \operatorname{cl}(Y) = \operatorname{int}(X \setminus Y)$.

Supongamos (a) y demostremos (b). Sea $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte y sea $D = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$. Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $U_k := X \setminus \operatorname{cl}(E_k)$. $\operatorname{cl}(U_k) = X \setminus \operatorname{int}(\operatorname{cl}(E_k)) = X$, así que $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos abiertos densos. Por la condición (a),

$$\operatorname{cl}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k\right) = X.$$

Luego

$$\operatorname{int}(D) = \operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) \subseteq \operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (X \setminus U_k)\right) = \varnothing.$$

Supongamos (b) y demostremos (a). Sea $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X, abiertos y densos. Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $E_k := X \setminus U_k$. Entonces $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(E_k)) = X \setminus \operatorname{cl}(\operatorname{int}(U_k)) = \varnothing$, así que $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte. Por la condición (b),

$$\operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \varnothing,$$

luego

$$\operatorname{cl}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k\right) = X. \qquad \square$$

10 Corolario. *Sea X un espacio métrico completo y no vacío. Entonces X no es magro.*

Este corolario se utiliza en demostraciones de algunos teoremas importantes sobre operadores lineales acotados en espacios de Banach. A saber, lo usamos para demostrar el teorema de la transformación lineal abierta y el principio de acotación uniforme.