El espectro y la función resolvente de operadores lineales acotados en espacios de Banach

Dante Arroyo Sánchez, Sofía Cano Flores,
Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

25 de noviembre de 2020

Plan

Objetivo

Dado un espacio de Banach X, estudiaremos las propiedades básicas del espectro y de la función resolvente de un operador lineal acotado.

Prerrequisitos

- El álgebra de los operadores lineales acotados en un espacio de Banach.
- El grupo de los operadores invertibles.
- La serie de von Neumann.

Notación

Sea X un espacio de Banach.

Denotamos por $\mathcal{B}(X)$ al álgebra de los operadores lineales acotados $X \to X$.

Usamos la notación $\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$ para el grupo de los elementos invertibles de esta álgebra, es decir, para el grupo de los operadores invertibles.

Denotamos por I al operador identidad.

Definiciones.

Dado A en $\mathcal{B}(X)$, el espectro del operador A se define como el siguiente conjunto:

$$\operatorname{Sp}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \quad \lambda I - A \notin \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))\}.$$

El conjunto $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}(A)$ se llama el conjunto resolvente del operador A.
La función resolvente del operador A se define de la siguiente manera:

$$R_A\colon \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}(A) \to \mathcal{B}(X), \qquad R_A(\lambda) := (\lambda I - A)^{-1}.$$

Algunos autores prefieren trabajar con $(A - \lambda I)^{-1}$ en vez de $(\lambda I - A)^{-1}$.

La serie de von Neumann

Proposición (la serie de von Neumann, repaso)

Sea $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\|T\| < 1$. Entonces $I - T \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ converge, y

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

Recordatorio demostración

Para la convergencia se utiliza el hecho de que $\|T\| < 1$ lo que implica lo siguiente

$$\|T^k\| \leq \|T\|^k, \sum_{k=0}^{\infty} < \infty$$

Recordatorio demostración

Para la convergencia se utiliza el hecho de que $\|T\| < 1$ lo que implica lo siguiente

$$\|T^k\| \leq \|T\|^k, \sum_{k=0}^{\infty} < \infty$$

y por la completitud de $B(X)$ entonces $\sum_{k=0}^{\infty}$ converge.

Recordatorio demostración

Para la convergencia se utiliza el hecho de que $\|T\| < 1$ lo que implica lo siguiente

$$\|T^k\| \leq \|T\|^k, \sum_{k=0}^{\infty} < \infty$$

y por la completitud de $B(X)$ entonces $\sum_{k=0}^{\infty}$ converge.

Para ver que es invertible, veamos lo siguiente

Recordatorio demostración

Para la convergencia se utiliza el hecho de que $\|T\| < 1$ lo que implica lo siguiente

$$\|T^k\| \leq \|T\|^k, \sum_{k=0}^{\infty} < \infty$$

y por la completitud de $B(X)$ entonces $\sum_{k=0}^{\infty}$ converge.
Para ver que es invertible, veamos lo siguiente

$$lim_{n\to\infty}(Id - T)\sum_{k=0}^{n} T^k =$$

Recordatorio demostración

Para la convergencia se utiliza el hecho de que $\|T\| < 1$ lo que implica lo siguiente

$$\|T^k\| \leq \|T\|^k, \sum_{k=0}^{\infty} < \infty$$

y por la completitud de $B(X)$ entonces $\sum_{k=0}^{\infty}$ converge.
Para ver que es invertible, veamos lo siguiente

$$lim_{n\to\infty}(Id - T)\sum_{k=0}^{n} T^k = lim_{n\to\infty}(\sum_{k=0}^{n} T^k - \sum_{k=0}^{m} T^{k+1}) =$$

Recordatorio demostración

Para la convergencia se utiliza el hecho de que $\|T\| < 1$ lo que implica lo siguiente

$$\|T^k\| \leq \|T\|^k, \sum_{k=0}^{\infty} < \infty$$

y por la completitud de $B(X)$ entonces $\sum_{k=0}^{\infty}$ converge.

Para ver que es invertible, veamos lo siguiente

$$lim_{n\to\infty}(Id - T)\sum_{k=0}^{n} T^k = lim_{n\to\infty}(\sum_{k=0}^{n} T^k - \sum_{k=0}^{m} T^{k+1}) = lim_{n\to\infty}(Id - T^{n+1}) = I$$

Ejercicio

Sea $T \in \mathrm{Inv}(X)$ y sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mostrar que $\lambda T \in \mathrm{Inv}(X)$ y

$$(\lambda T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} T^{-1}.$$

Plan

Ejercicio auxiliar

Ejercicio. Sea $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\|T\| < 1$. Entonces,

$$\|(I - T)^{-1} - I\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|}.$$

El espectro es acotado

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}(X)$ y sea λ en $\mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > \|A\|$. Entonces $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$ y

$$R_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k.$$

Inicio de la demostración. En la expresión $\lambda I - A$ factorizamos λ:

$$(\lambda I - A) = \lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} A \right).$$

Continuación de la demostración

La condición $|\lambda| > \|A\|$ implica que $\|(1/\lambda)A\| < 1$, y por las condiciones de la proposición de la serie de Von Neumann, el operador $I - (1/\lambda)A$ es invertible, y su inverso se puede calcular por la suma de la serie de von Neumann:

Continuación de la demostración

La condición $|\lambda| > \|A\|$ implica que $\|(1/\lambda)A\| < 1$, y por las condiciones de la proposición de la serie de Von Neumann, el operador $I - (1/\lambda)A$ es invertible, y su inverso se puede calcular por la suma de la serie de von Neumann:

$$\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}A\right)^{k} = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-k}A^{k}.$$

Continuación de la demostración

La condición $|\lambda| > \|A\|$ implica que $\|(1/\lambda)A\| < 1$, y por las condiciones de la proposición de la serie de Von Neumann, el operador $I - (1/\lambda)A$ es invertible, y su inverso se puede calcular por la suma de la serie de von Neumann:

$$\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda}\,A\right)^{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} A^{k}.$$

Luego,

Continuación de la demostración

La condición $|\lambda| > \|A\|$ implica que $\|(1/\lambda)A\| < 1$, y por las condiciones de la proposición de la serie de Von Neumann, el operador $I - (1/\lambda)A$ es invertible, y su inverso se puede calcular por la suma de la serie de von Neumann:

$$\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda}A\right)^{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} A^{k}.$$

Luego,

$$(\lambda I - A)^{-1} =$$

Continuación de la demostración

La condición $|\lambda| > \|A\|$ implica que $\|(1/\lambda)A\| < 1$, y por las condiciones de la proposición de la serie de Von Neumann, el operador $I - (1/\lambda)A$ es invertible, y su inverso se puede calcular por la suma de la serie de von Neumann:

$$\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}A\right)^{k} = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-k}A^{k}.$$

Luego,

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1}$$

Continuación de la demostración

La condición $|\lambda| > \|A\|$ implica que $\|(1/\lambda)A\| < 1$, y por las condiciones de la proposición de la serie de Von Neumann, el operador $I - (1/\lambda)A$ es invertible, y su inverso se puede calcular por la suma de la serie de von Neumann:

$$\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda}A\right)^{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k}A^{k}.$$

Luego,

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k}A^{k} =$$

Continuación de la demostración

La condición $|\lambda| > \|A\|$ implica que $\|(1/\lambda)A\| < 1$, y por las condiciones de la proposición de la serie de Von Neumann, el operador $I - (1/\lambda)A$ es invertible, y su inverso se puede calcular por la suma de la serie de von Neumann:

$$\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda}A\right)^{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} A^{k}.$$

Luego,

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} A^{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} A^{k}.$$

La función resolvente tiende a cero en el infinito

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}(X)$. Entonces

$$\mathrm{Sp}(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \colon \ |\lambda| \leq \|A\|\}$$

y

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|R_A(\lambda)\| = 0.$$

Inicio de la demostración. De la proposición anterior tenemos que si $|\lambda| > \|A\|$, entonces $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$, la función resolvente se expande en la serie:

$$R_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k.$$

Continuación de la demostración

Su norma se puede acotar de la siguiente manera:

$$\|R_A(\lambda)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^{-k-1} \|A\|^k = \frac{1}{|\lambda|} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\|A\|}{|\lambda|} \right)^k = \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{\|A\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|},$$

esto es,

Continuación de la demostración

Su norma se puede acotar de la siguiente manera:

$$\|R_A(\lambda)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^{-k-1}\|A\|^k = \frac{1}{|\lambda|}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\|A\|}{|\lambda|}\right)^k = \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1-\frac{\|A\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda|-\|A\|},$$

esto es,

$$\|R_A(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\lambda|-\|A\|}.$$

Continuación de la demostración

Su norma se puede acotar de la siguiente manera:

$$\|R_A(\lambda)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^{-k-1}\|A\|^k = \frac{1}{|\lambda|}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\|A\|}{|\lambda|}\right)^k = \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1-\frac{\|A\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda|-\|A\|},$$

esto es,

$$\|R_A(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\lambda|-\|A\|}.$$

Cuando λ tiende a ∞, la última expresión tiende a cero.

Plan

Ejercicio auxiliar

Ejercicio. Sea $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\|T\| < 1$. Demostrar que:

$$\|(I - T)^{-1} - I\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|}$$

.

El espectro es cerrado

Proposición

Sean $A \in \mathcal{B}(X)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}(A)$, $\xi \in \mathbb{C}$ tal que

$$|\xi - \lambda| < \frac{1}{\|R_A(\lambda)\|}. \tag{1}$$

Entonces $\xi \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}(A)$ y

$$\|R_A(\xi) - R_A(\lambda)\| \le \frac{|\xi - \lambda|\,\|R_A(\lambda)\|^2}{1 - |\xi - \lambda|\,\|R_A(\lambda)\|}. \tag{2}$$

Inicio de la demostración. Transformamos la expresión $\xi I - A$:

$$\xi I - A = \lambda I - A + (\xi - \lambda)I = (\lambda I - A)\big(I + (\xi - \lambda)R_A(\lambda)\big).$$

Continuación de la demostración

Pongamos $T := -(\xi - \lambda) R_A(\lambda)$. Entonces la condición (1) implica que

$$\|T\| = |\xi - \lambda| \, \|R_A(\lambda)\| < 1.$$

Continuación de la demostración

Pongamos $T := -(\xi - \lambda)R_A(\lambda)$. Entonces la condición (1) implica que

$$\|T\| = |\xi - \lambda| \, \|R_A(\lambda)\| < 1.$$

Luego $I - T \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ y,

$$\|(I - T)^{-1} - I\|$$

Continuación de la demostración

Pongamos $T := -(\xi - \lambda)R_A(\lambda)$. Entonces la condición (1) implica que

$$\|T\| = |\xi - \lambda| \, \|R_A(\lambda)\| < 1.$$

Luego $I - T \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ y,

$$\|(I - T)^{-1} - I\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|}$$

Continuación de la demostración

Pongamos $T := -(\xi - \lambda)R_A(\lambda)$. Entonces la condición (1) implica que

$$\|T\| = |\xi - \lambda| \, \|R_A(\lambda)\| < 1.$$

Luego $I - T \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ y,

$$\|(I - T)^{-1} - I\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} = \frac{|\xi - \lambda| \, \|R_A(\lambda)\|}{1 - |\xi - \lambda| \, \|R_A(\lambda)\|}.$$

Continuación de la demostración

Pongamos $T := -(\xi - \lambda)R_A(\lambda)$. Entonces la condición (1) implica que

$$\|T\| = |\xi - \lambda| \, \|R_A(\lambda)\| < 1.$$

Luego $I - T \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ y,

$$\|(I - T)^{-1} - I\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} = \frac{|\xi - \lambda| \, \|R_A(\lambda)\|}{1 - |\xi - \lambda| \, \|R_A(\lambda)\|}.$$

El operador $\xi I - A$ es invertible por ser el producto de dos operadores invertibles, y

$$R_A(\xi) = (I - T)^{-1} R_A(\lambda).$$

Final de la demostración

$$R_A(\xi) = (I - T)^{-1} R_A(\lambda).$$

Final de la demostración

$$R_A(\xi) = (I - T)^{-1} R_A(\lambda).$$

De aquí

$$R_A(\xi) - R_A(\lambda) = \left((I - T)^{-1} - I\right) R_A(\lambda).$$

Por lo que,

Final de la demostración

$$R_A(\xi) = (I - T)^{-1} R_A(\lambda).$$

De aquí

$$R_A(\xi) - R_A(\lambda) = \left((I - T)^{-1} - I\right) R_A(\lambda).$$

Por lo que,

$$\|R_A(\xi) - R_A(\lambda)\| \leq \left\|\left((I - T)^{-1} - I\right)\right\| \, \|R_A(\lambda)\| \leq \frac{|\xi - \lambda| \, \|R_A(\lambda)\|^2}{1 - |\xi - \lambda| \, \|R_A(\lambda)\|}.$$

La función resolvente es continua

Corolario

Sea $A \in \mathcal{B}(X)$. Entonces el conjunto $\mathrm{Sp}(A)$ es cerrado, y la función R_A es continua.

Demostración. Se sigue de la proposición anterior.

Plan

Ejercicio: la primera identidad para la función resolvente

Ejercicio. Sean $A \in \mathcal{B}(X)$, $\lambda, \xi \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}(A)$. Demostrar que

$$R_A(\lambda) - R_A(\xi) = -(\lambda - \xi) R_A(\lambda) R_A(\xi).$$

La función resolvente es holomorfa

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}(X)$ y sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(A)$. Entonces

$$\lim_{\xi \to \lambda} \frac{R_A(\xi) - R_A(\lambda)}{\xi - \lambda} = -R_A(\lambda)^2.$$

Demostración. Se sigue del ejercicio anterior y de la continuidad de R_A.

La función resolvente es analítica

Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{B}(X)$ y sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(A)$. Encontrar una sucesión $(S_k)_{k=0}^{\infty}$ en $\mathcal{B}(X)$ tal que para cada ξ en $\mathbb{C}$ con $|\xi - \lambda| < \|R_A(\lambda)\|^{-1}$, se tiene la siguiente expansión:

$$R_A(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} (\xi - \lambda)^k S_k.$$

Sugerencia: usar las ideas de la demostración de la proposición acerca de que el espectro es cerrado, y la fórmula explícita para $(I - T)^{-1}$.

Plan

Ejercicios sobre el cálculo de algunos espectros

Ejercicio. Calcular el espectro de los operadores de desplazamiento a la izquierda y a la derecha en el espacio $\ell^2(\mathbb{N})$.

Ejercicio. Sea $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Calcular el espectro del operador de multiplicación M_a en el espacio $\ell^2(\mathbb{N})$.

Tarea: el espectro del operador de convolución en $\ell^2(\mathbb{Z})$

Dada una sucesión $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$, definimos $S_a \colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$,

$$(S_a x)_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j-k} x_k.$$

Entonces se puede demostrar que

$$\mathrm{Sp}(S_a) = f[\mathbb{T}],$$

donde $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \colon \ |z| = 1\}$ y

$$f(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k t^k.$$

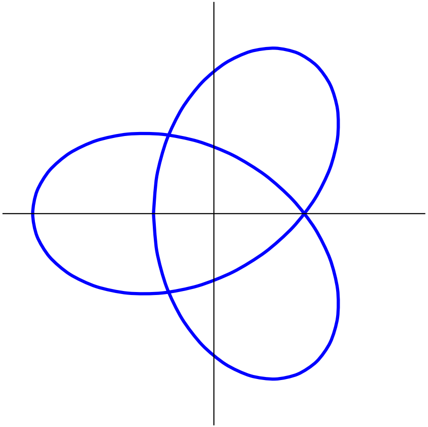
Tarea: el espectro del operador de convolución en $\ell^2(\mathbb{Z})$

Ejemplo:

$$a = (\ldots, 0, \underbrace{1}_{-1}, \underbrace{0}_{0}, \underbrace{0}_{1}, \underbrace{-2}_{2}, 0, \ldots),$$

$$f(t) = t^{-1} - 2t^2.$$

La curva es el espectro de S_a.



Ejemplo complicado: el espectro del operador de convolución truncada en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$

Dada una sucesión $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$, definimos $T_a \colon \ell^2(\mathbb{N}_0) \to \ell^2(\mathbb{N}_0)$,

$$(T_a x)_j = \sum_{k=0}^{\infty} a_{j-k} x_k.$$

Entonces $\operatorname{Sp}(T_a)$ es el subconjunto de los puntos en $\mathbb{C}$ que se "abarcan" por la curva del ejemplo anterior.

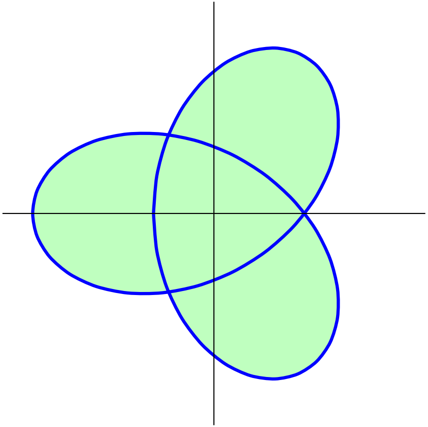
Ejemplo complicado: el espectro del operador de convolución truncada en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$

Ejemplo:

$$a = (\ldots, 0, \underbrace{1}_{-1}, \underbrace{0}_{0}, \underbrace{0}_{1}, \underbrace{-2}_{2}, 0, \ldots),$$

$$f(t) = t^{-1} - 2t^2.$$

La figura sombreada es el espectro de T_a.



Ejercicio: el espectro del desplazamiento a la izquierda en $\ell^p(\mathbb{N})$

Sea $p \in [1, +\infty)$. Consideramos $L\colon \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$,

$$(Lx)_j := x_{j+1}.$$

- Calcular $\|L\|$. Concluir que $\operatorname{Sp}(L) \subseteq \{z \in \mathbb{C}:\ |z| \leq ???\}$.
- Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1$. Encontrar $x \in \ell^p(\mathbb{N})$ tal que $x \neq 0_{\mathbb{N}}$ y

$$Lx = \lambda x.$$

  Se trata de resolver un sistema infinito de ecuaciones lineales homogéneas.
- De lo anterior, concluir que $\mathbb{D} \subseteq \operatorname{Sp}(L)$.
- Usando los incisos anteriores, encontrar $\operatorname{Sp}(L)$.

Ejercicio: el espectro del desplazamiento a la derecha en $\ell^p(\mathbb{N})$

Sea $p \in [1, +\infty)$. Consideramos $R\colon \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$,

$$(Rx)_j := \begin{cases} x_{j-1}, & j \geq 2; \\ 0, & j = 1. \end{cases}$$

- Calcular $\|R\|$. Concluir que $\operatorname{Sp}(R) \subseteq \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| \leq ???\}$.
- Mostrar que R no es sobre. Más precisamente, $e_1 \notin \operatorname{im}(R)$.
- Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, $0 < |\lambda| < 1$. Escribir una fórmula para $(\lambda I - R)x$.
- Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, $0 < |\lambda| < 1$. Demostrar que $e_1 \notin \operatorname{im}(\lambda I - R)$.
- De lo anterior, concluir que $\mathbb{D} \subseteq \operatorname{Sp}(R)$.
- Usando los incisos anteriores, encontrar $\operatorname{Sp}(R)$.