

El espectro y la función resolvente de operadores lineales acotados en espacios de Banach

Dante Arroyo Sánchez, Sofía Cano Flores,
Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

15 de mayo de 2022

Plan

- 1 Introducción
- 2 El espectro es acotado, y la función resolvente tiende a cero en el infinito
- 3 El espectro es cerrado, y la función resolvente es continua
- 4 La función resolvente es holomorfa y analítica
- 5 Ejemplos

- 1 Introducción
- 2 El espectro es acotado, y la función resolvente tiende a cero en el infinito
- 3 El espectro es cerrado, y la función resolvente es continua
- 4 La función resolvente es holomorfa y analítica
- 5 Ejemplos

Objetivo

Dado un espacio de Banach X , estudiaremos las propiedades básicas del espectro y de la función resolvente de un operador lineal acotado.

Prerrequisitos

- El álgebra de los operadores lineales acotados en un espacio de Banach.
- El grupo de los operadores invertibles.
- La serie de Neumann.

Notación

Sea X un espacio de Banach.

Denotamos por $\mathcal{B}(X)$ al álgebra de los operadores lineales acotados $X \rightarrow X$.

Usamos la notación $\text{Inv}(\mathcal{B}(X))$ para el grupo de los elementos invertibles de esta álgebra, es decir, para el grupo de los operadores invertibles.

Denotamos por I al operador identidad.

Definiciones.

Dado A en $\mathcal{B}(X)$, el espectro del operador A se define como el siguiente conjunto:

$$\text{Sp}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \notin \text{Inv}(\mathcal{B}(X))\}.$$

El conjunto $\mathbb{C} \setminus \text{Sp}(A)$ se llama el conjunto resolvente del operador A .
La función resolvente del operador A se define de la siguiente manera:

$$R_A : \mathbb{C} \setminus \text{Sp}(A) \rightarrow \mathcal{B}(X), \quad R_A(\lambda) := (\lambda I - A)^{-1}.$$

Algunos autores prefieren trabajar con $(A - \lambda I)^{-1}$ en vez de $(\lambda I - A)^{-1}$.

La serie de Neumann (repaso)

Proposición

Sea $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\|T\| < 1$.

Entonces $I - T \in \text{Inv}(\mathcal{B}(X))$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ converge, y

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

Ejercicio

Sea $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\|T\| < 1$. Demostrar que

$$\|(I - T)^{-1} - I\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|}.$$

Ejercicio

Sea $T \in \text{Inv}(X)$ y sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mostrar que $\lambda T \in \text{Inv}(X)$ y

$$(\lambda T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} T^{-1}.$$

Plan

- 1 Introducción
- 2 El espectro es acotado, y la función resolvente tiende a cero en el infinito
- 3 El espectro es cerrado, y la función resolvente es continua
- 4 La función resolvente es holomorfa y analítica
- 5 Ejemplos

El espectro es acotado

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}(X)$ y sea λ en \mathbb{C} tal que $|\lambda| > \|A\|$. Entonces $\lambda \notin \text{Sp}(A)$ y

$$R_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k.$$

Inicio de la demostración

En la expresión $\lambda I - A$ factorizamos λ :

$$(\lambda I - A) = \lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} A \right).$$

Inicio de la demostración

En la expresión $\lambda I - A$ factorizamos λ :

$$(\lambda I - A) = \lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} A \right).$$

Pongamos $T := \frac{1}{\lambda} A$.

Inicio de la demostración

En la expresión $\lambda I - A$ factorizamos λ :

$$(\lambda I - A) = \lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} A \right).$$

Pongamos $T := \frac{1}{\lambda} A$. La condición $|\lambda| > \|A\|$ implica que

$$\|T\| = |\lambda|^{-1} \|A\| < 1.$$

Inicio de la demostración

En la expresión $\lambda I - A$ factorizamos λ :

$$(\lambda I - A) = \lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} A \right).$$

Pongamos $T := \frac{1}{\lambda} A$. La condición $|\lambda| > \|A\|$ implica que

$$\|T\| = |\lambda|^{-1} \|A\| < 1.$$

Por la proposición sobre la serie de Neumann, el operador $I - T$ es invertible, y

$$\left(I - \frac{1}{\lambda} A \right)^{-1} = (I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} A^k.$$

Final de la demostración

Ya sabemos que $\lambda I - A = \lambda(I - T)$ y

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} A^k.$$

Final de la demostración

Ya sabemos que $\lambda I - A = \lambda(I - T)$ y

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} A^k.$$

Luego

$$(\lambda I - A)^{-1}$$

Final de la demostración

Ya sabemos que $\lambda I - A = \lambda(I - T)$ y

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} A^k.$$

Luego

$$(\lambda I - A)^{-1} =$$

Final de la demostración

Ya sabemos que $\lambda I - A = \lambda(I - T)$ y

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} A^k.$$

Luego

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} (I - T)^{-1}$$

Final de la demostración

Ya sabemos que $\lambda I - A = \lambda(I - T)$ y

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} A^k.$$

Luego

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(I - T)^{-1} =$$

Final de la demostración

Ya sabemos que $\lambda I - A = \lambda(I - T)$ y

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} A^k.$$

Luego

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} A^k$$

Final de la demostración

Ya sabemos que $\lambda I - A = \lambda(I - T)$ y

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} A^k.$$

Luego

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} (I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} A^k =$$

Final de la demostración

Ya sabemos que $\lambda I - A = \lambda(I - T)$ y

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} A^k.$$

Luego

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} (I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} A^k.$$

La función resolvente tiende a cero en el infinito

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}(X)$. Entonces

$$\text{Sp}(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leq \|A\|\}$$

y

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|R_A(\lambda)\| = 0.$$

La función resolvente tiende a cero en el infinito

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}(X)$. Entonces

$$\text{Sp}(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leq \|A\|\}$$

y

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|R_A(\lambda)\| = 0.$$

Demostración. La contención se sigue directamente de la proposición anterior:

La función resolvente tiende a cero en el infinito

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}(X)$. Entonces

$$\text{Sp}(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leq \|A\|\}$$

y

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|R_A(\lambda)\| = 0.$$

Demostración. La contención se sigue directamente de la proposición anterior: si $|\lambda| > \|A\|$, entonces $\lambda \notin \text{Sp}(A)$.

Demostración

Si $|\lambda| > \|A\|$, entonces sabemos que

$$R_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k.$$

Demostración

Si $|\lambda| > \|A\|$, entonces sabemos que

$$R_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k.$$

Acotamos la norma:

$$\|R_A(\lambda)\|$$

Demostración

Si $|\lambda| > \|A\|$, entonces sabemos que

$$R_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k.$$

Acotamos la norma:

$$\|R_A(\lambda)\| \leq$$

Demostración

Si $|\lambda| > \|A\|$, entonces sabemos que

$$R_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k.$$

Acotamos la norma:

$$\|R_A(\lambda)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^{-k-1} \|A\|^k$$

Demostración

Si $|\lambda| > \|A\|$, entonces sabemos que

$$R_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k.$$

Acotamos la norma:

$$\|R_A(\lambda)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^{-k-1} \|A\|^k =$$

Demostración

Si $|\lambda| > \|A\|$, entonces sabemos que

$$R_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k.$$

Acotamos la norma:

$$\|R_A(\lambda)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^{-k-1} \|A\|^k = \frac{1}{|\lambda|} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\|A\|}{|\lambda|} \right)^k$$

Demostración

Si $|\lambda| > \|A\|$, entonces sabemos que

$$R_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k.$$

Acotamos la norma:

$$\|R_A(\lambda)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^{-k-1} \|A\|^k = \frac{1}{|\lambda|} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\|A\|}{|\lambda|}\right)^k =$$

Demostración

Si $|\lambda| > \|A\|$, entonces sabemos que

$$R_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k.$$

Acotamos la norma:

$$\|R_A(\lambda)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^{-k-1} \|A\|^k = \frac{1}{|\lambda|} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\|A\|}{|\lambda|}\right)^k = \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{\|A\|}{|\lambda|}}$$

Demostración

Si $|\lambda| > \|A\|$, entonces sabemos que

$$R_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k.$$

Acotamos la norma:

$$\|R_A(\lambda)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^{-k-1} \|A\|^k = \frac{1}{|\lambda|} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\|A\|}{|\lambda|}\right)^k = \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{\|A\|}{|\lambda|}} =$$

Demostración

Si $|\lambda| > \|A\|$, entonces sabemos que

$$R_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k.$$

Acotamos la norma:

$$\|R_A(\lambda)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^{-k-1} \|A\|^k = \frac{1}{|\lambda|} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\|A\|}{|\lambda|}\right)^k = \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{\|A\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}.$$

Demostración

Si $|\lambda| > \|A\|$, entonces sabemos que

$$R_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k.$$

Acotamos la norma:

$$\|R_A(\lambda)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^{-k-1} \|A\|^k = \frac{1}{|\lambda|} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\|A\|}{|\lambda|}\right)^k = \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{\|A\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}.$$

Cuando λ tiende a ∞ , la última expresión tiende a cero.

Plan

- 1 Introducción
- 2 El espectro es acotado, y la función resolvente tiende a cero en el infinito
- 3 El espectro es cerrado, y la función resolvente es continua**
- 4 La función resolvente es holomorfa y analítica
- 5 Ejemplos

Ejercicio auxiliar

Ejercicio. Sea $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\|T\| < 1$. Demostrar que:

$$\|(I - T)^{-1} - I\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|}$$

El espectro es cerrado

Proposición

Sean $A \in \mathcal{B}(X)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp}(A)$, $\xi \in \mathbb{C}$ tal que

$$|\xi - \lambda| < \frac{1}{\|R_A(\lambda)\|}.$$

Entonces $\xi \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp}(A)$ y

$$\|R_A(\xi) - R_A(\lambda)\| \leq \frac{|\xi - \lambda| \|R_A(\lambda)\|^2}{1 - |\xi - \lambda| \|R_A(\lambda)\|}.$$

Inicio de la demostración.

Transformamos la expresión $\xi I - A$:

$$\xi I - A$$

Inicio de la demostración.

Transformamos la expresión $\xi I - A$:

$$\xi I - A =$$

Inicio de la demostración.

Transformamos la expresión $\xi I - A$:

$$\xi I - A = \lambda I - A + (\xi - \lambda)I$$

Inicio de la demostración.

Transformamos la expresión $\xi I - A$:

$$\xi I - A = \lambda I - A + (\xi - \lambda)I =$$

Inicio de la demostración.

Transformamos la expresión $\xi I - A$:

$$\xi I - A = \lambda I - A + (\xi - \lambda)I = (\lambda I - A) \left(I + (\xi - \lambda)R_A(\lambda) \right).$$

Inicio de la demostración.

Transformamos la expresión $\xi I - A$:

$$\xi I - A = \lambda I - A + (\xi - \lambda)I = (\lambda I - A) \left(I + (\xi - \lambda)R_A(\lambda) \right).$$

Pongamos

$$T := -(\xi - \lambda)R_A(\lambda).$$

Entonces la condición $|\xi - \lambda| < 1/\|R_A(\lambda)\|$ implica que

$$\|T\|$$

Inicio de la demostración.

Transformamos la expresión $\xi I - A$:

$$\xi I - A = \lambda I - A + (\xi - \lambda)I = (\lambda I - A) \left(I + (\xi - \lambda)R_A(\lambda) \right).$$

Pongamos

$$T := -(\xi - \lambda)R_A(\lambda).$$

Entonces la condición $|\xi - \lambda| < 1/\|R_A(\lambda)\|$ implica que

$$\|T\| =$$

Inicio de la demostración.

Transformamos la expresión $\xi I - A$:

$$\xi I - A = \lambda I - A + (\xi - \lambda)I = (\lambda I - A) \left(I + (\xi - \lambda)R_A(\lambda) \right).$$

Pongamos

$$T := -(\xi - \lambda)R_A(\lambda).$$

Entonces la condición $|\xi - \lambda| < 1/\|R_A(\lambda)\|$ implica que

$$\|T\| = |\xi - \lambda| \|R_A(\lambda)\| < 1.$$

Inicio de la demostración.

Transformamos la expresión $\xi I - A$:

$$\xi I - A = \lambda I - A + (\xi - \lambda)I = (\lambda I - A) \left(I + (\xi - \lambda)R_A(\lambda) \right).$$

Pongamos

$$T := -(\xi - \lambda)R_A(\lambda).$$

Entonces la condición $|\xi - \lambda| < 1/\|R_A(\lambda)\|$ implica que

$$\|T\| = |\xi - \lambda| \|R_A(\lambda)\| < 1.$$

Luego $I - T$ es invertible y $\lambda I - A$ es invertible como producto de dos operadores invertibles.

Final de la demostración

$$\|(I - T)^{-1} - I\|$$

Final de la demostración

$$\|(I - T)^{-1} - I\| \leq$$

Final de la demostración

$$\|(I - T)^{-1} - I\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|}$$

Final de la demostración

$$\|(I - T)^{-1} - I\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} =$$

Final de la demostración

$$\|(I - T)^{-1} - I\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} = \frac{|\xi - \lambda| \|R_A(\lambda)\|}{1 - |\xi - \lambda| \|R_A(\lambda)\|}.$$

Final de la demostración

$$\|(I - T)^{-1} - I\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} = \frac{|\xi - \lambda| \|R_A(\lambda)\|}{1 - |\xi - \lambda| \|R_A(\lambda)\|}.$$

Como $\xi I - A = (\lambda I - A)(I - T)$,

$$R_A(\xi) = (I - T)^{-1} R_A(\lambda).$$

Final de la demostración

$$\|(I - T)^{-1} - I\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} = \frac{|\xi - \lambda| \|R_A(\lambda)\|}{1 - |\xi - \lambda| \|R_A(\lambda)\|}.$$

Como $\xi I - A = (\lambda I - A)(I - T)$,

$$R_A(\xi) = (I - T)^{-1} R_A(\lambda).$$

De aquí $R_A(\xi) - R_A(\lambda) = ((I - T)^{-1} - I)R_A(\lambda)$

Final de la demostración

$$\|(I - T)^{-1} - I\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} = \frac{|\xi - \lambda| \|R_A(\lambda)\|}{1 - |\xi - \lambda| \|R_A(\lambda)\|}.$$

Como $\xi I - A = (\lambda I - A)(I - T)$,

$$R_A(\xi) = (I - T)^{-1} R_A(\lambda).$$

De aquí $R_A(\xi) - R_A(\lambda) = ((I - T)^{-1} - I)R_A(\lambda)$ y

$$\|R_A(\xi) - R_A(\lambda)\|$$

Final de la demostración

$$\|(I - T)^{-1} - I\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} = \frac{|\xi - \lambda| \|R_A(\lambda)\|}{1 - |\xi - \lambda| \|R_A(\lambda)\|}.$$

Como $\xi I - A = (\lambda I - A)(I - T)$,

$$R_A(\xi) = (I - T)^{-1} R_A(\lambda).$$

De aquí $R_A(\xi) - R_A(\lambda) = ((I - T)^{-1} - I)R_A(\lambda)$ y

$$\|R_A(\xi) - R_A(\lambda)\| \leq$$

Final de la demostración

$$\|(I - T)^{-1} - I\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} = \frac{|\xi - \lambda| \|R_A(\lambda)\|}{1 - |\xi - \lambda| \|R_A(\lambda)\|}.$$

Como $\xi I - A = (\lambda I - A)(I - T)$,

$$R_A(\xi) = (I - T)^{-1} R_A(\lambda).$$

De aquí $R_A(\xi) - R_A(\lambda) = ((I - T)^{-1} - I) R_A(\lambda)$ y

$$\|R_A(\xi) - R_A(\lambda)\| \leq \|(I - T)^{-1} - I\| \|R_A(\lambda)\|$$

Final de la demostración

$$\|(I - T)^{-1} - I\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} = \frac{|\xi - \lambda| \|R_A(\lambda)\|}{1 - |\xi - \lambda| \|R_A(\lambda)\|}.$$

Como $\xi I - A = (\lambda I - A)(I - T)$,

$$R_A(\xi) = (I - T)^{-1} R_A(\lambda).$$

De aquí $R_A(\xi) - R_A(\lambda) = ((I - T)^{-1} - I)R_A(\lambda)$ y

$$\|R_A(\xi) - R_A(\lambda)\| \leq \|(I - T)^{-1} - I\| \|R_A(\lambda)\| \leq$$

Final de la demostración

$$\|(I - T)^{-1} - I\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} = \frac{|\xi - \lambda| \|R_A(\lambda)\|}{1 - |\xi - \lambda| \|R_A(\lambda)\|}.$$

Como $\xi I - A = (\lambda I - A)(I - T)$,

$$R_A(\xi) = (I - T)^{-1} R_A(\lambda).$$

De aquí $R_A(\xi) - R_A(\lambda) = ((I - T)^{-1} - I) R_A(\lambda)$ y

$$\|R_A(\xi) - R_A(\lambda)\| \leq \|(I - T)^{-1} - I\| \|R_A(\lambda)\| \leq \frac{|\xi - \lambda| \|R_A(\lambda)\|^2}{1 - |\xi - \lambda| \|R_A(\lambda)\|}.$$

Final de la demostración

$$R_A(\xi) = (I - T)^{-1}R_A(\lambda).$$

Final de la demostración

$$R_A(\xi) = (I - T)^{-1}R_A(\lambda).$$

Por lo que,

Final de la demostración

$$R_A(\xi) = (I - T)^{-1}R_A(\lambda).$$

Por lo que,

$$\|R_A(\xi) - R_A(\lambda)\| \leq \|((I - T)^{-1} - I)\| \|R_A(\lambda)\| \leq \frac{|\xi - \lambda| \|R_A(\lambda)\|^2}{1 - |\xi - \lambda| \|R_A(\lambda)\|}.$$

La función resolvente es continua

Corolario

Sea $A \in \mathcal{B}(X)$. Entonces el conjunto $\text{Sp}(A)$ es cerrado, y la función R_A es continua.

La función resolvente es continua

Corolario

Sea $A \in \mathcal{B}(X)$. Entonces el conjunto $\text{Sp}(A)$ es cerrado, y la función R_A es continua.

Demostración. Se sigue de la proposición anterior.

Plan

- 1 Introducción
- 2 El espectro es acotado, y la función resolvente tiende a cero en el infinito
- 3 El espectro es cerrado, y la función resolvente es continua
- 4 La función resolvente es holomorfa y analítica
- 5 Ejemplos

Ejercicio: la primera identidad para la función resolvente

Ejercicio. Sean $A \in \mathcal{B}(X)$, $\lambda, \xi \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp}(A)$. Demostrar que

$$R_A(\lambda) - R_A(\xi) = -(\lambda - \xi)R_A(\lambda)R_A(\xi).$$

La función resolvente es holomorfa

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}(X)$ y sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp}(A)$. Entonces

$$\lim_{\xi \rightarrow \lambda} \frac{R_A(\xi) - R_A(\lambda)}{\xi - \lambda} = -R_A(\lambda)^2.$$

La función resolvente es holomorfa

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}(X)$ y sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp}(A)$. Entonces

$$\lim_{\xi \rightarrow \lambda} \frac{R_A(\xi) - R_A(\lambda)}{\xi - \lambda} = -R_A(\lambda)^2.$$

Demostración. Se sigue del ejercicio anterior y de la continuidad de R_A .

La función resolvente es analítica

Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{B}(X)$ y sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp}(A)$.

Encontrar una sucesión $(S_k)_{k=0}^{\infty}$ en $\mathcal{B}(X)$ tal que para cada ξ en \mathbb{C} con $|\xi - \lambda| < \|R_A(\lambda)\|^{-1}$, se tiene la siguiente expansión:

$$R_A(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} (\xi - \lambda)^k S_k.$$

Sugerencia: usar las ideas de la demostración de la proposición acerca de que el espectro es cerrado, y la fórmula explícita para $(I - T)^{-1}$.

Plan

- 1 Introducción
- 2 El espectro es acotado, y la función resolvente tiende a cero en el infinito
- 3 El espectro es cerrado, y la función resolvente es continua
- 4 La función resolvente es holomorfa y analítica
- 5 Ejemplos

Ejercicios sobre el cálculo de algunos espectros

Ejercicio. Calcular el espectro de los operadores de desplazamiento a la izquierda y a la derecha en el espacio $\ell^2(\mathbb{N})$.

Ejercicio. Sea $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Calcular el espectro del operador de multiplicación M_a en el espacio $\ell^2(\mathbb{N})$.

Tarea: el espectro del operador de convolución en $\ell^2(\mathbb{Z})$

Dada una sucesión $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$, definimos $S_a: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$,

$$(S_a x)_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} x_k.$$

Entonces se puede demostrar que

$$\text{Sp}(S_a) = f[\mathbb{T}],$$

donde $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ y

$$f(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k t^k.$$

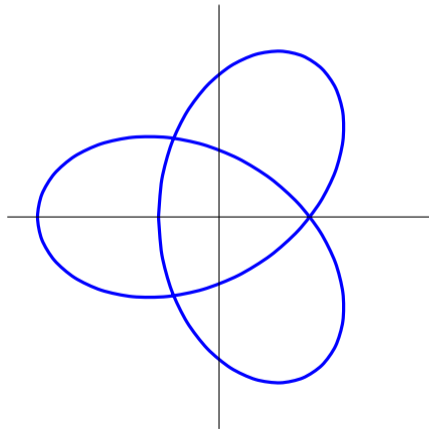
Tarea: el espectro del operador de convolución en $\ell^2(\mathbb{Z})$

Ejemplo:

$$a = (\dots, 0, \underbrace{1}_{-1}, \underbrace{0}_0, \underbrace{0}_1, \underbrace{-2}_2, 0, \dots),$$

$$f(t) = t^{-1} - 2t^2.$$

La curva es el espectro de S_a .



Ejemplo complicado:

el espectro del operador de convolución truncada en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$

Dada una sucesión $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$, definimos $T_a: \ell^2(\mathbb{N}_0) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}_0)$,

$$(T_a x)_j = \sum_{k=0}^{\infty} a_{j-k} x_k.$$

Entonces $\text{Sp}(T_a)$ es el subconjunto de los puntos en \mathbb{C} que se “abarcán” por la curva del ejemplo anterior.

Ejemplo complicado:

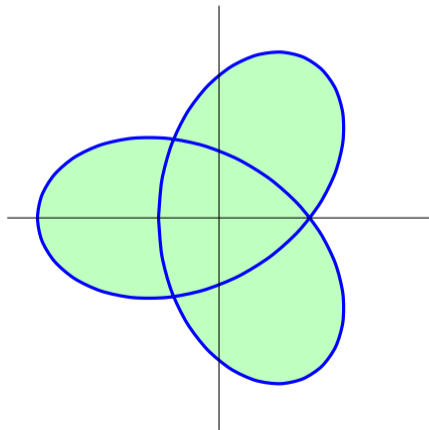
el espectro del operador de convolución truncada en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$

Ejemplo:

$$a = (\dots, 0, \underbrace{1}_{-1}, \underbrace{0}_0, \underbrace{0}_1, \underbrace{-2}_2, 0, \dots),$$

$$f(t) = t^{-1} - 2t^2.$$

La figura sombreada es el espectro de T_a .



Ejercicio: el espectro del desplazamiento a la izquierda en $\ell^p(\mathbb{N})$

Sea $p \in [1, +\infty)$. Consideramos $L: \ell^p(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^p(\mathbb{N})$,

$$(Lx)_j := x_{j+1}.$$

- Calcular $\|L\|$. Concluir que $\text{Sp}(L) \subseteq \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq ???\}$.
- Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1$. Encontrar $x \in \ell^p(\mathbb{N})$ tal que $x \neq 0_{\mathbb{N}}$ y

$$Lx = \lambda x.$$

Se trata de resolver un sistema infinito de ecuaciones lineales homogéneas.

- De lo anterior, concluir que $\mathbb{D} \subseteq \text{Sp}(L)$.
- Usando los incisos anteriores, encontrar $\text{Sp}(L)$.

Ejercicio: el espectro del desplazamiento a la derecha en $\ell^p(\mathbb{N})$

Sea $p \in [1, +\infty)$. Consideramos $R: \ell^p(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^p(\mathbb{N})$,

$$(Rx)_j := \begin{cases} x_{j-1}, & j \geq 2; \\ 0, & j = 1. \end{cases}$$

- Calcular $\|R\|$. Concluir que $\text{Sp}(R) \subseteq \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq ???\}$.
- Mostrar que R no es sobre. Más precisamente, $e_1 \notin \text{im}(R)$.
- Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, $0 < |\lambda| < 1$. Escribir una fórmula para $(\lambda I - R)x$.
- Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, $0 < |\lambda| < 1$. Demostrar que $e_1 \notin \text{im}(\lambda I - R)$.
- De lo anterior, concluir que $\mathbb{D} \subseteq \text{Sp}(R)$.
- Usando los incisos anteriores, encontrar $\text{Sp}(R)$.