Solución de ecuaciones cuadráticas (ejercicios)

1. Ecuación cuadrática reducida (repaso). Resolvamos la ecuación

$$z^2 = a^2.$$

Pasamos a^2 al lado izquierdo con otro signo y aplicamos la fórmula para la diferencia de cuadrados:

$$z^2 - a^2 = 0.$$

$$(z - a)(z + a) = 0.$$

El producto de dos números (reales o complejos) puede ser 0 solamente en el caso si alguno de estos números es cero.

$$z - a = 0 \qquad \vee \qquad z + a = 0.$$

Respuesta: el conjunto solución es $\{ \qquad , \qquad \}$.
Notemos que si $a = 0$, entonces el conjunto solución consiste de $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{¿cuántos elementos?}}$.

2. Ecuación cuadrática en forma simplificada. Resolvamos la ecuación

$$z^2 - 2px + q = 0. \tag{1}$$

Para completar al cuadrado, sumamos y restamos p^2 en el lado izquierdo:

$$z^2 - 2px + p^2 - \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} = 0.$$

Escribimos los primeros tres sumandos como el cuadrado de una diferencia, y los demás sumandos pasamos al lado derecho cambiando sus signos:

$$(z - p)^2 = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}. \tag{2}$$

Denotemos $p^2 - q$ por d. Si $d > 0$, entonces hay dos raíces reales del número D.

Si $d = 0$, entonces la única raíz de D es $\underbrace{\qquad}_{?}$.

En otro caso, existen dos raíces $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{¿reales o complejas?}}$ del número d.

En todos estos casos, denotemos alguna de las raíces cuadradas de d por r:

$$d = r^2.$$

Notemos que la otra raíz cuadrada del número d es $\underbrace{\qquad}_{?}$.

La ecuación (2) se puede escribir como

$$(z-p)^2 = r^2.$$

Como vimos en el ejercicio anterior, hay dos casos:

$$z - p = \underbrace{\qquad}_{?} \qquad \vee \qquad z - p = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

El conjunto solución es $\{p + \qquad , \qquad\qquad \}$.

3. Ecuación cuadrática en forma general. Resolvamos la ecuación

$$az^2 + bz + c = 0,$$

donde a, b, c son algunos números (reales o complejos), $a \neq 0$.

Demostración. Dividimos ambos lados entre a:

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0.$$

Escribimos $\frac{b}{a}$ como $2p$, donde $p = \qquad\qquad$, luego sumamos y restamos el cuadrado de este número p:

$$z^2 + 2 \cdot \underline{\qquad} + \left(\underline{\qquad}\right)^2 - \left(\underline{\qquad}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0.$$

Escribimos los primeros tres sumandos como el cuadrado de un número, y los últimos dos pasamos al lado derecho con otro signo:

$$\left(z - \underline{\qquad}\right)^2 =$$

Escribimos el lado derecho como un cociente:

$$\left(z - \underline{\qquad}\right)^2 = \frac{\qquad\qquad}{a^2}.$$

Denotemos el numerador de este cociente por D:

$$D =$$

$\square$