Raíces de números complejos

Objetivos. Estudiar soluciones de la ecuación $z^n = a$.

Requisitos. Fórmula de Moivre, criterio de igualdad de números complejos.

1. Notación $\boldsymbol{P_\theta}$ (repaso). Para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$ denotamos por P_θ o por $P(\theta)$ al número complejo

$$P_\theta = \cos(\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta).$$

Recordando la definición geométrica de cos y sen notamos que en el plano complejo P_θ es el punto de la circunferencia unitaria que corresponde al ángulo θ.

2. Multiplicación de números complejos en forma polar (repaso). Sean $r_1, r_2 \geq 0$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Entonces

$$(r_1 P(\theta_1))(r_2 P(\theta_2)) = (r_1 r_2) P_{\theta_1+\theta_2}.$$

3. Fórmula de Moivre (repaso). Para cualesquier $\theta \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$(rP_\theta)^n = r^n P_{n\theta}.$$

4. Criterio de igualdad a uno de un número complejo escrito en forma polar (repaso). Sean $\rho \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) $\rho P(\theta) = 1$.

(b) $\rho = 1$ y existe un $q \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta = 2q\pi$.

5. Criterio de igualdad de números complejos escritos en forma polar (repaso). Sean $r_1, r_2 > 0$ y $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) $r_1 P(\theta_1) = r_2 P(\theta_2)$.

(b) $r_1 = r_2$ y existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$.

6. Teorema (sobre raíces de un número complejo no nulo). Sea $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces la ecuación $z^n = w$ tiene exactamente n raíces complejas diferentes a pares. Si $w = rP(\alpha)$, donde $r > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces las raíces de la ecuación $z^n = w$ se pueden escribir como

$$z_k = \sqrt[n]{r} P\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Demostración. Etapa I. Notemos que z no puede ser 0, porque $0^n = 0 \neq w$. Busquemos z en la forma polar:

$$z = \rho P(\theta) \qquad (\rho > 0,\ \theta \in \mathbb{R}).$$

Entonces la ecuación $z^n = w$ se puede escribir en la forma

$$(\rho P(\theta))^n = rP(\alpha),$$

o, por la fórmula de Moivre, en la forma

$$\rho^n P(n\theta) = rP(\alpha).$$

Por el criterio de la igualdad de números complejos escritos en la forma polar, la última igualdad se cumple si, y sólo si, $\rho^n = r$ y existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n\theta = \alpha + 2k\pi$, esto es,

$$\theta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}.$$

Para cada $k \in \mathbb{Z}$ denotemos por z_k al número complejo

$$z_k = \sqrt[n]{r}\ P\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right).$$

Los razonamientos que hicimos hasta este momento muestran que el conjunto solución de la ecuación $z^n = 1$ es

$$\{z_k\colon \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

Etapa II. Demostremos que los números $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ son diferentes entre si. Sean $p, q \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tales que $z_p = z_q$. Entonces por el criterio de igualdad de números complejos escritos en forma polar existe un $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\alpha + 2p\pi}{n} = \frac{\alpha + 2q\pi}{n} + 2k\pi,$$

de donde

$$p - q = nk.$$

Pero de las desigualdades

$$0 \leq p < n, \qquad 0 \leq q < n$$

se sigue que

$$-n < p - q < n,$$

esto es, $|p - q| < n$ y $|k| = \frac{|p-q|}{n} < 1$. Entonces $k = 0$, esto es, $p = q$.

Etapa III. Sea $k \in \mathbb{Z}$. Mostremos que z_k coincide con uno de los números $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$. Dividimos k entre n:

$$k = nq + s, \qquad 0 \leq s < n.$$

Entonces

$$z_k = \sqrt[n]{r}\,P\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\,P\left(\frac{\alpha + 2s\pi + 2nq\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\,P\left(\frac{\alpha + 2s\pi}{n} + 2q\pi\right).$$

Por la fórmula de multiplicación de números complejos en forma polar,

$$z_k = \sqrt[n]{r}\,P\left(\frac{\alpha + 2s\pi}{n}\right) P(2q\pi) = \sqrt[n]{r}\,P\left(\frac{\alpha + 2s\pi}{n}\right) = z_s. \qquad \square$$

7. Proposición (raíces complejas del número cero). Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces la ecuación $z^n = 0$ tiene una única solución $z = 0$.

Demostración. Supongamos que $z \in \mathbb{C}$ y $z^n = 0$. Como el valor absoluto del producto es igual al producto de los valores absolutos, $|z|^n = |z^n| = 0$, de donde $|z| = 0$ y $z = 0$.

Al revés, si $z = 0$, entonces $z^n = 0^n = 0$. $\square$

8. Ejemplo. Resolver la ecuación $z^2 = 25\,\mathrm{i}$.

Demostración. Escribimos w en forma polar: $w = 25P(\pi/2)$. Por el teorema, la ecuación $z^2 = w$ tiene dos soluciones:

$$z_k = 5P\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{2}\right), \qquad k = 0, 1.$$

Calculemos z_0 y z_1 en forma polar y luego en forma binómica:

$$z_0 = 5P\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i},$$

$$z_1 = 5P\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\,.$$

Hagamos comprobación para z_0:

$$z_0^2 = \frac{25}{2} + 25\,\mathrm{i} - \frac{25}{2} = 25\,\mathrm{i}\,. \quad \checkmark$$

La comprobación para z_1 es similar. $\square$

9. Ejemplo. Resolver la ecuación $z^6 = -64$.

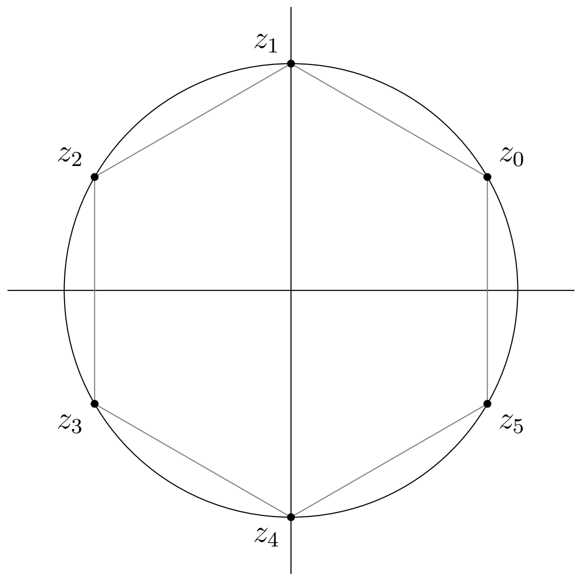
Solución. Escribimos -64 en la forma polar:

$$-64 = 64(-1) = 2^6 P(\pi).$$

Por el teorema sobre raíces de un número complejo no nulo, el conjunto solución consiste de 6 elementos:

$$z_k = 2P\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right)\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, 5.$$

Todos estos números están en la circunferencia de radio 2 con centro en el origen y son vértices de un hexágono regular inscrito en esta circunferencia:



Escribimos los números z_k $(k = 0, 1, \ldots, 5)$ en forma polar y en forma binómica:

$$z_0 = 2P\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\sqrt{3}2 + \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + \mathrm{i}, \qquad z_1 = 2P\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\,\mathrm{i},$$

$$z_2 = 2P\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + \mathrm{i}, \qquad z_3 = 2P\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - \mathrm{i},$$

$$z_4 = 2P\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2\,\mathrm{i}, \qquad z_5 = 2P\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - \mathrm{i}\,.$$

Hagamos comprobación para z_0, usando el teorema del binomio:

$$\begin{aligned} z_0^6 = \left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)^6 &= 27 + 6 \cdot 9\sqrt{3}\,\mathrm{i} - 15 \cdot 9 - 20 \cdot 3\sqrt{3}\,\mathrm{i} + 15 \cdot 3 + 6 \cdot \sqrt{3}\,\mathrm{i} - 1 \\ &= (27 - 135 + 45 - 1) + (36 - 60+)\sqrt{3}\ \mathrm{i} = -64. \quad \checkmark \end{aligned}$$

La comprobación para z_1 es más fácil: $z_1^6 = (2\,\mathrm{i})^6 = 64\,\mathrm{i}^4\,\mathrm{i}^2 = -64$. $\square$