Raíces racionales de polinomios con coeficientes enteros

Objetivos. Dado un polinomio de una variable con coeficientes enteros, estudiar la forma que pueden tener sus raíces racionales.

Requisitos. Primos relativos y sus propiedades.

1. Forma canónica de un número racional. Recordemos que cada número racional se puede escribir como j/k, donde $j, k \in \mathbb{Z}$ y $k \neq 0$.

- Si $k < 0$, entonces le númerador y el denominador se pueden multiplicar por -1, y se obtiene el mismo número racional, pero con un denominador entero positivo.
- Sea d el máximo común divisor de j y k. Si $d > 1$, entonces j y k se pueden dividir entre d, y después de esto el numerador y el denominador ya son primos relativos.

Resumen: cada número racional se puede escribir como j/k, donde $j, k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$ y $\operatorname{mcd}(j, k) = 1$.

2. Sobre primos relativos y sus potencias (repaso). Sean $j, k \in \mathbb{Z}$ tales que $\operatorname{mcd}(j, k) = 1$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\operatorname{mcd}(j, k^n) = 1$.

3. Sobre la divisibilidad y primos relativos (repaso). Sean $d, m, n \in \mathbb{Z}$ tales que dmn y $\operatorname{mcd}(d, m) = 1$. Entonces dn.

4. Teorema (sobre raíces racionales de polinomios con coeficientes enteros). Sea j/k una raíz del polinomio

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$, $j, k \in \mathbb{Z}$, $k > 1$, $\operatorname{mcd}(j, k) = 1$. Entonces ja_0 y ka_n.

Demostración. Escribimos la igualdad $f(j/k) = 0$ y multiplicamos ambos lados por k^n:

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} j + a_2 k^{n-2} j^2 + \ldots + a_{n-1} k j^{n-1} + a_n j^n = 0. \tag{1}$$

1. Dejamos $a_0 k^n$ en el lado izquierdo de la igualdad, pasamos los demás sumandos al lado derecho y factorizamos j:

$$a_0 k^n = -j \left(a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} j + \ldots + a_n j^{n-1} \right).$$

El número j divide al lado derecho, por lo tanto también divide al lado izquiero:

$$j(a_0 k^n). \tag{2}$$

Pero $\operatorname{mcd}(j, k) = 1$, por eso

$$\operatorname{mcd}(j, k^n) = 1. \tag{3}$$

De (2) y (3) concluimos que $j a_0$.

2. Otra vez consideramos la igualdad (1). Dejamos $a_n j^n$ en el lado izquierdo de la igualdad, pasamos los demás sumandos al lado derecho y factorizamos k:

$$a_n j^n = -k \left(a_0 k^{n-1} + a_1 k^{n-2} j + \ldots + a_{n-1} j^{n-1}\right).$$

El número k divide al lado derecho, por lo tanto divide al lado izquierdo:

$$k(a_n j^n). \tag{4}$$

Pero $\operatorname{mcd}(k, j) = 1$. Por consecuencia,

$$\operatorname{mcd}(k, j^n) = 1. \tag{5}$$

De (4) y (5) concluimos que $k a_n$. □

5. Corolario (sobre raíces racionales de polinomios mónicos con coeficientes enteros). En el caso $a_n = 1$ se puede concluir que $j a_0$ y $k = 1$.