Números complejos en la forma polar (lista de problemas para examen)

En esta lista de problemas trabajamos con números complejos en la *forma polar* (llamada también la *forma trigonométrica*).

El sentido geométrico del valor absoluto de números complejos

1. Encuentre los siguientes conjuntos en el plano complejo $\mathbb{C}$.

- $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 2\}$, $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| \le 4\}$, $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| \ge 3\}$.
- $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 1\}$, $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| > 4\}$.
- $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z - 2 + 3\,\mathrm{i}\,| = 2\}$.
- $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z + 3 - \mathrm{i}\,| < 1\}$, $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z - 2\,\mathrm{i}\,| > 3\}$.
- $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z + 3| \le 2\}$, $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z + 5 - 2\,\mathrm{i}\,| \ge 4\}$.

2. Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demuestre que $\left|\dfrac{z}{|z|}\right| = 1.$

Representación números complejos en forma trigonométrica

3. Ejemplos. Represente en forma trigonométrica los siguientes números complejos:

- $-4 + 4\sqrt{3}$, $7 - 7\,\mathrm{i}$, $-2\sqrt{3} + 2\,\mathrm{i}$, $-2\,\mathrm{i}$, $5\,\mathrm{i}$, -3, 6,
- $2 + 5\,\mathrm{i}$, $4 - 3\,\mathrm{i}$, $-7 + \mathrm{i}$, $-12 - 5\,\mathrm{i}$.

4. Existencia de un ángulo que corresponde a un número en la circunferencia unitaria. Dado un número $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$, existe un $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\cos(\theta) = \operatorname{Re}(z), \qquad \operatorname{sen}(\theta) = \operatorname{Im}(z),$$

esto es,

$$z = \cos(\theta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta).$$

Por ejemplo, un número θ con esta propiedad se puede escribir en términos de la función arc cos:

$$\theta = \begin{cases} \arccos(\operatorname{Re}(z)), & \operatorname{Im}(z) \ge 0; \\ -\arccos(\operatorname{Re}(z)), & \operatorname{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

5. Escriba en forma trigonométrica los siguientes números complejos:

1. $z = 1 + \cos(\alpha) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\alpha)$, donde $\alpha \in [0, \pi]$.
2. $z = 1 - \cos(\alpha) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\alpha)$, donde $\alpha \in [0, \pi]$.
3. $z = 1 + \cos(\alpha) - \mathrm{i}\operatorname{sen}(\alpha)$, donde $\alpha \in [0, \pi]$.
4. $z = 1 - \cos(\alpha) - \mathrm{i}\operatorname{sen}(\alpha)$, donde $\alpha \in [0, \pi]$.

Multiplicación de números complejos en forma trigonométrica

6. Teorema: multiplicación de números complejos en forma trigonométrica. Sean

$$z_1 = \rho_1(\cos(\theta_1) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta_1)), \qquad z_2 = \rho_2(\cos(\theta_2) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta_2)),$$

donde $\rho_1, \rho_2 \geq 0$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 \big(\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2)\big).$$

7. División de números complejos en forma trigonométrica. Sean

$$z_1 = \rho_1(\cos(\theta_1) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta_1)), \qquad z_2 = \rho_2(\cos(\theta_2) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta_2)),$$

donde $\rho_1 \geq 0$, $\rho_2 > 0$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\big(\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2)\big).$$

8. Fórmula de Moivre. Sean $\rho \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que

$$(\cos(\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta))^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(n\theta).$$

Indicación: utilice la inducción matemática sobre n.

9. Calcule cada una de las siguientes potencias con dos métodos: 1) con la fórmula de Moivre; 2) con el teorema del binomio.

$$(5 + 5\,\mathrm{i})^3, \quad (-3 + \mathrm{i}\,3)^4, \quad (2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i})^3, \quad (-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i})^5.$$

10. Calcule z^n, donde:

1. $z = 1 + \cos(\alpha) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\alpha)$.
2. $z = 1 - \cos(\alpha) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\alpha)$.
3. $z = 1 + \cos(\alpha) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\alpha)$.
4. $z = 1 - \cos(\alpha) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\alpha)$.

11. Demuestre que:

$$(1 + \mathrm{i})^n = 2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{4}\right),$$
$$(\sqrt{3} - \mathrm{i})^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{6}\right).$$

12. Demostrar que

$$\left(\frac{1 + \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\alpha}\right)^n = \frac{1 + \mathrm{i}\,\mathrm{tg}(n\alpha)}{1 - \mathrm{i}\,\mathrm{tg}(n\alpha)}.$$

13. Demostrar que si $z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$, entonces

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\alpha).$$

Unicidad salvo múltiplos de 2π del argumento de número complejo no nulo

14. Solución de la ecuación $\cos(\theta) = 1$. Encuentre la solución general de la ecuación

$$\cos(\theta) = 1.$$

15. Ángulos correspondientes al punto 1. Demuestre que

$$\cos(\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta) = 1$$

si, y sólo si,

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta = 2k\pi.$$

16. Unicidad salvo sumandos múltiplos de 2π del ángulo correspondiente a un número en la circunferencia unitaria. Sean $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\cos(\theta_1) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta_1) = \cos(\theta_2) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta_2).$$

Demuestre que existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$.

17. Unicidad del argumento principal. Sean $\theta_1, \theta_2 \in (-\pi, \pi]$ tales que

$$\cos(\theta_1) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta_1) = \cos(\theta_2) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta_2).$$

Demuestre $\theta_1 = \theta_2$.

18. Sean $\rho_1, \rho_2 > 0$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\rho_1(\cos(\theta_1) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta_1)) = \rho_2(\cos(\theta_2) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta_2)).$$

Demuestre que $\rho_1 = \rho_2$ y existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$.

19. Sean $\rho_1, \rho_2 > 0$, $\theta_1, \theta_2 \in (-\pi, \pi]$ tales que

$$\rho_1(\cos(\theta_1) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta_1)) = \rho_2(\cos(\theta_2) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta_2)).$$

Demuestre que $\rho_1 = \rho_2$ y $\theta_1 = \theta_2$.

Aplicación de números complejos a fórmulas trigonométricas

20. Notación P_θ. Dado $\theta \in \mathbb{R}$ denotemos por P_θ al número complejo

$$P_\theta = \cos(\theta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta).$$

Explique el sentido geométrico de P_θ. Muestre que

$$P_{-\theta} = \cos(\theta) - \mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta),$$

$$\cos(\theta) = \frac{P_\theta + P_{-\theta}}{2}, \qquad \operatorname{sen}(\theta) = \frac{P_\theta - P_{-\theta}}{2\,\mathrm{i}}. \tag{1}$$

21. El conjugado de un número complejo en la circunferencia unitaria. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Muestre que $\overline{P_\alpha} = P_{-\alpha}$ y que $P_\alpha^{-1} = P_{-\alpha}$.

22. Multiplicación de números complejos en la circunferencia unitaria. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Simplifique la expresión $P_\alpha P_\beta$. Explique el sentido geométrico.

23. Fórmula de Moivre con notación P_α. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Simplifique la expresión P_α^n.

24. Usando la fórmula de Moivre exprese a través de $\cos(\theta)$ y $\operatorname{sen}(\theta)$:

- $\cos(2\theta)$ y $\operatorname{sen}(2\theta)$,
- $\cos(3\theta)$ y $\operatorname{sen}(3\theta)$,
- $\cos(4\theta)$ y $\operatorname{sen}(4\theta)$.

25. Sean $\theta \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Usando la fórmula de Moivre exprese $\cos(n\theta)$ y $\operatorname{sen}(n\theta)$ a través de $\cos(\theta)$ y $\operatorname{sen}(\theta)$.

26. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Usando las fórmulas (1) deduzca fórmulas para

$$(\cos(\alpha))^2, \quad (\operatorname{sen}(\alpha))^2, \quad (\cos(\alpha))^3, \quad (\operatorname{sen}(\alpha))^3, \quad (\cos(\alpha))^4, \quad (\operatorname{sen}(\alpha))^4.$$

27. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Usando las fórmulas (1) y el teorema del binomio deduzca fórmulas para

$$(\cos(\alpha))^n, \qquad (\operatorname{sen}(\alpha))^n.$$

28. Recuerde la fórmula para la suma de la progresión geométrica:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = ?, \qquad \sum_{K=0}^{n} q^k = ? \qquad (q \neq 1).$$

Usando esta fórmula y la fórmula de Moivre deduzca fórmulas para las siguientes sumas:

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta), \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta), \qquad \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(k\theta).$$

Se supone que θ no es múltiplo entero de 2π.

Resolución de la ecuación $z^n = a$

29. Demuestre que si $z^n = 0$, entonces $z = 0$.

En los siguientes problemas se considera la ecuación

$$z^n = a,$$

donde $a = rP_\theta$ con $r > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$, y $n \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ pongamos

$$z_k = \sqrt[k]{r}P\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right).$$

Demuestre que:

30. $z_k^n = a$ para cada $k \in \mathbb{Z}$.

31. Si $z \in \mathbb{C}$ y $z^n = a$, entonces existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = z_k$.

32. Los números z_k con $0 \le k < n$ son diferentes por pares.

33. Si $j \in \mathbb{Z}$, entonces existe un $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tal que $z_j = z_k$.

34. Usando los resultados de los problemas anteriores haga conclusión sobre el conjunto solución de la ecuación $z^n = a$.

Raíces n-ésimas de la unidad

Sea $n \in \mathbb{N}$. Pongamos

$$\omega_n = P\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Demuestre que:

35. $\omega_n^n = 1$.

36. Si $z \in \mathbb{C}$ y $z^n = 1$, entonces existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = \omega_n^k$.

37. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, la igualdad $\omega_n^k = 1$ se tiene si y sólo si $n \mid k$.

38. Para cualesquier $p, q \in \mathbb{Z}$, la igualdad $\omega_n^p = \omega_n^q$ se tiene si y sólo si $n \mid (p-q)$.

39. Para cualesquier $p, q \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, la igualdad $\omega_n^p = \omega_n^q$ implica $p = q$.

40. Para cualquier $j \in \mathbb{Z}$ existe un $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tal que $\omega_n^j = \omega_n^k$.

41. Usando los resultados de los problemas anteriores haga conclusión sobre el conjunto solución de la ecuación $z^n = 1$.

42. Suma de las raíces de la unidad. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Muestre que $\omega_n \ne 1$ y calcule la suma

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^k.$$