Números complejos
(lista de problemas para examen)

En esta lista de problemas trabajamos con la construcción de números complejos (como pares ordenados de los reales) y con su representación en la *forma binómica* (llamada también la *forma rectangular* o *cartesiana*).

1. Repaso de las propiedades de números reales. Repasar las propiedades principales aritméticas de los números reales.

Construcción de números complejos

2. Números complejos como pares ordenados de números reales. Denotamos por $\mathbb{C}$ al conjunto $\mathbb{R}^2$, esto es, al conjunto de los pares ordenados (x, y), donde $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Igualdad de pares ordenados de los números reales. ¿Cuándo dos pares ordenados (x, y) y (u, v) se llaman *iguales*?

4. Pares ordenados diferentes entre si. ¿Cuándo dos pares ordenados (x, y) y (u, v) son diferentes entre si?

5. Pares ordenados diferentes del par cero. ¿Cuándo $(x, y) \neq (0, 0)$?

6. Criterio de igualdad a cero de un par ordenado. Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Muestre que

$$(x, y) = (0, 0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + y^2 = 0.$$

Por lo tanto,

$$(x, y) \neq (0, 0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + y^2 > 0.$$

7. Definición de la adición y multiplicación. En el conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definimos dos operaciones binarias, $\oplus$ y $\otimes$, mediante las reglas:

$$(x, y) \oplus (u, v) = (x + u, y + v), \qquad (x, y) \otimes (u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

Esta notación es provisional y se utiliza solamente en esta sección; luego se usa la notación más simple $(x, y) + (u, v)$ y $(x, y)(u, v)$.

8. Propiedades de la adición de números complejos. Sean $z, w, c \in \mathbb{R}^2$. Denotemos sus componentes de la siguientes manera:

$$z = (x, y), \qquad w = (u, v), \qquad c = (a, b).$$

Demuestre que se cumplen las siguientes propiedades:

- $z \oplus w = w \oplus z$.

- $z \oplus (w \oplus c) = (z \oplus w) \oplus c$.
- $z \oplus (0,0) = z$.
- $z \oplus (-x,-y) = (0,0)$.

9. Propiedad conmutativa de la multiplicación de números complejos. Sean $z, w \in \mathbb{R}^2$. Demuestre que

$$z \otimes w = w \otimes z.$$

10. Propiedad distributiva de la multiplicación de números complejos respecto a la adición. Sean $z, w, c \in \mathbb{R}^2$. Demuestre que

$$z \otimes (w \oplus c) = (z \otimes w) \oplus (z \otimes c).$$

11. Propiedad asociativa de la multiplicación de números complejos. Sean $z, w, c \in \mathbb{R}^2$. Demuestre que

$$z \otimes (w \otimes c) = (z \otimes w) \otimes c.$$

12. Elemento neutro bajo la multiplicación de números complejos. Sea $z \in \mathbb{R}^2$. Demuestre que

$$z \otimes (1,0) = z.$$

13. Conjugación de números complejos. Sea $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Escriba la definición de $\overline{z}$.

14. El conjugado de la suma de dos números complejos. Sean $z, w \in \mathbb{R}^2$. Demuestre que

$$\overline{z \oplus w} = \overline{z} \oplus \overline{w}.$$

15. El conjugado del producto de dos números complejos. Sean $z, w \in \mathbb{R}^2$. Demuestre que

$$\overline{z \otimes w} = \overline{z} \otimes \overline{w}.$$

16. El producto de un número complejo por su conjugado. Sea $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Muestre que

$$z \otimes \overline{z} = x^2 + y^2.$$

17. Invertibilidad de números complejos distintos de cero. Sea $z \in \mathbb{R}^2$ tal que $z \neq (0,0)$. Encuentre un número $w \in \mathbb{R}^2$ tal que $z \otimes w = (1,0)$.

El encaje canónico de los números reales en los complejos

18. Definimos $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mediante la regla

$$E(x) \coloneqq (x, 0).$$

Demostrar que la función E es inyectiva: si $a, b \in \mathbb{R}$ y $E(a) = E(b)$, entonces $a = b$.

19. Demostrar que la función E definida en el ejercicio anterior es aditiva y multiplicativa:

$$E(a + b) = E(a) \oplus E(b), \qquad E(ab) = E(a) \otimes E(b).$$

20. Identificación de números reales con números complejos de la forma $(x, 0)$. Los resultados de los problemas anteriores permiten identificar $x \in \mathbb{R}$ con $(x, 0) \in \mathbb{C}$.

21. Unidad imaginaria. El par ordenado $(0, 1)$ se llama la *unidad imaginaria* y se denota por i. Demuestre que

$$\mathrm{i}^2 = (-1, 0).$$

Usando la identificación $(-1, 0) = -1$, podemos escribir esta propiedad de manera más breve:

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

22. Forma binómica de números complejos. Muestre que

$$(x, y) = (x, 0) \oplus ((0, y) \otimes (0, 1)).$$

Identificando x con $(x, 0)$, y con $(y, 0)$, podemos escribir

$$(x, y) = x + y\,\mathrm{i}\,.$$

23. A partir de este momento vamos a escribir los números complejos en la forma binómica y usar la notación común para la suma y el producto. Escriba las fórmulas para la suma y el producto de dos números complejos. Si $z = x + y\,\mathrm{i}$, $w = u + v\,\mathrm{i}$, donde $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, entonces

$$z + w = ?, \qquad zw = ?.$$

24. Sea $x \in \mathbb{R}$. Simplifique el siguiente producto:

$$(1 - 1 - \mathrm{i})(1 - 1 + \mathrm{i})(x + 1 + \mathrm{i})(x + 1 - \mathrm{i}).$$

25. Parte real y parte imaginaria de un número complejo. Sea $z = x + y\,\mathrm{i}$, donde $x, y \in \mathbb{R}$. Recuerde cómo se definen $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$.

26. Potencias $2, 3, 4$ de un número complejo. Sea $z = x + y\,\mathrm{i}$, donde $x, y \in \mathbb{R}$. Calcule z^2, z^3, z^4 y sus partes reales e imaginarias.

Complejo conjugado y valor absoluto

27. Complejo conjugado en la forma binómica.. Sea $z = x + \mathrm{i}\,y \in \mathbb{C}$. Entonces $\overline{z}$ se define como $x - \mathrm{i}\,y$.

28. Suma y resta de un número complejo con su conjugado. Sea $z \in \mathbb{C}$. Exprese $z + \overline{z}$ y $z - \overline{z}$ a través de $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$.

29. Expresión de la parte real e imaginaria de un número complejo a través del mismo número y su conjugado. Sea $z \in \mathbb{C}$. Muestre que

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\,\mathrm{i}}.$$

30. Propiedades aditiva y multiplicativa de la conjugación compleja. Demuestre las siguientes fórmulas para $\overline{z + w}$ y $\overline{zw}$, trabajando con la forma binómica:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

31. Propiedad involutiva de la conjugación compleja. Sea $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que

$$\overline{\overline{z}} = z.$$

32. Propiedad aditiva de la conjugación compleja, el caso de varios sumandos. Demuestre que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$,

$$\overline{\sum_{j=1}^{n} z_j} = \sum_{j=1}^{n} \overline{z_j}.$$

33. Propiedad multiplicativa de la conjugación compleja, el caso de varios factores. Demuestre que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$,

$$\overline{\prod_{j=1}^{n} z_j} = \prod_{j=1}^{n} \overline{z_j}.$$

34. El conjugado de una potencia natural de un número complejo. Sea $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\overline{z^n} = \overline{z}^n.$$

35. Valor absoluto de un número complejo. Sea $z = x + \mathrm{i}\,y \in \mathbb{C}$. La expresión $\sqrt{x^2 + y^2}$ se llama el *valor absoluto* (o la *norma*) de z y se denota por $|z|$. Demuestre que

$$z\,\overline{z} = |z|^2.$$

36. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $z = \cos\alpha + \mathrm{i}\operatorname{sen}\alpha$. Calcule $\overline{z}$ y $|z|$.

37. Para resolver los siguientes 4 ejercicios recuerde la expresión de $1+\cos\alpha$ y $1-\cos\alpha$ a través de $\cos\frac{\alpha}{2}$ y $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$. Recuerde también la fórmula para $\sqrt{x^2}$, donde x es un número real.

38. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $z = 1+\cos\alpha + \mathrm{i}\operatorname{sen}\alpha$. Calcule $\overline{z}$ y $|z|$.

39. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $z = 1+\cos\alpha - \mathrm{i}\operatorname{sen}\alpha$. Calcule $\overline{z}$ y $|z|$.

40. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $z = 1-\cos\alpha + \mathrm{i}\operatorname{sen}\alpha$. Calcule $\overline{z}$ y $|z|$.

41. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $z = 1-\cos\alpha - \mathrm{i}\operatorname{sen}\alpha$. Calcule $\overline{z}$ y $|z|$.

42. Propiedad multiplicativa del valor absoluto. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Demuestre que

$$|zw| = |z|\,|w|.$$

43. Valor absoluto de una potencia entera no negativa. Sea $z \in \mathbb{C}$ y sea $n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$. Demuestre que

$$|z^n| = |z|^n.$$

44. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Exprese $|z+w|^2$ y $|z-w|^2$ a través de $|z|^2$, $|w|^2$, $z\overline{w}$ y $\overline{z}w$.

45. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Demuestre que $\overline{z\,\overline{w}} = \overline{z}\,w$.

46. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Demuestre que $z\overline{w} + \overline{z}w = 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) \le |z|\,|w|$.

47. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Demuestre que

$$|z+w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \tag{1}$$

y

$$|z-w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2. \tag{2}$$

48. Identidad de paralelogramo. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Demuestre que

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

49. Identidad de polarización. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Demuestre que

$$4z\overline{w} = |z+w|^2 + \mathrm{i}\,|z+\mathrm{i}\,w|^2 - |z-w|^2 - \mathrm{i}\,|z-\mathrm{i}\,w|^2.$$

50. Comparación de la parte real de un número complejo con su valor absoluto. Sea $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que

$$\operatorname{Re}(z) \le |\operatorname{Re}(z)| \le |z|. \tag{3}$$

51. Comparación de la parte imaginaria de un número complejo con su valor absoluto. Sea $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que

$$\operatorname{Im}(z) \le |\operatorname{Im}(z)| \le |z|. \tag{4}$$

52. Propiedad subaditiva del valor absoluto de números complejos. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Demuestre que

$$|z + w| \le |z| + |w|.$$

Esta propiedad también se llama la *desigualdad triangular*.

53. Desigualdad triangular inversa para números complejos. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Demuestre que

$$||z| - |w|| \le |z - w|.$$

Sugerencia: hay que demostrar que $-|z - w| \le |z| - |w| \le |z - w|$.

54. Criterio de número complejo no nulo, en términos de su valor absoluto. Sea $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que

$$z \ne 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |z| \ne 0.$$

55. Recíproco de un número complejo. Sea $z \in \mathbb{C}$, $z \ne 0$. Demuestre que

$$z\,\frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1,$$

así que z es invertible y

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

56. Cociente de números complejos. Sean $z = x + \mathrm{i}\,y \in \mathbb{C}$, $w = u + \mathrm{i}\,v \in \mathbb{C}$, $w \ne 0$. Escriba zw^{-1} en la forma binómica.

57. Valor absoluto del cociente de números complejos. Enuncie bien y demuestre una fórmula que exprese $|z/w|$ a través de $|z|$ y $|w|$.

58. Calcule o simplifique los siguientes cocientes:

$$\frac{1 + \mathrm{i}\operatorname{tg}\alpha}{1 - \mathrm{i}\operatorname{tg}\alpha}, \qquad \frac{a + b\,\mathrm{i}}{a - b\,\mathrm{i}}, \qquad \frac{(1-\mathrm{i})^5 - 1}{(1+\mathrm{i})^5 + 1}.$$

Raíces cuadradas y ecuaciones cuadráticas

59. Raíces cuadradas de números negativos. Sea $a > 0$. Demuestre que la ecuación $z^2 = -a$ tiene exactamente dos soluciones:

$$\sqrt{a}\,\mathrm{i}, \qquad -\sqrt{a}\,\mathrm{i}\,.$$

60. Raíz cuadrada del número complejo cero. Demuestre que la ecuación $z^2 = 0$ tiene una única solución $z = 0$.

61. Raíces cuadradas de números complejos. Sea $c = a + \mathrm{i}\,b \in \mathbb{C}$. Resuelva la ecuación $z^2 = c$.

62. Completar al cuadrado un polinomio mónico de grado dos. Muestre que

$$z^2 - 2pz + q = (z - p)^2 + q - p^2.$$

63. Completar al cuadrado un polinomio de grado dos. Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Encuentre $p, q \in \mathbb{C}$ tales que

$$az^2 + bz + c = a((z - p)^2 + q).$$

64. Solución de la ecuación cuadrática con coeficientes reales. Resuelva la ecuación

$$az^2 + bz + c = 0,$$

suponiendo que $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Considere tres casos: $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$, donde $D = b^2 - 4ac$.

65. Solución de la ecuación cuadrática con coeficientes complejos. Resuelva la ecuación

$$az^2 + bz + c = 0,$$

donde $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Sugerencia: denote por r a una de las raíces cuadradas del número $b^2 - 4ac$.