Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Posgrado en Ciencias Físicomatemáticas

Línea de Matemáticas

Lista de problemas de álgebra

Egor Maximenko: En mi opinión, cualquier estudiante de maestría o doctorado, cuya área de investigación está relacionada con análisis o con álgebra lineal, debe resolver la mayor parte de los siguientes problemas de álgebra. Casi todos estos problemas son bien conocidos, los encontré en varias fuentas. Esta lista casi no incluye problemas de la teoría de grupos, anillos y campos.

Números complejos y polinomios de una variable

Problema 1. Sea $-1 < a < 1$. Mostrar que la ecuación $4z^3 - 3z + a = 0$ tiene tres raíces reales diferentes. Expresar estas raíces a través de $\cos(\phi)$ y $\operatorname{sen}(\phi)$, donde $\phi = \frac{1}{3}\operatorname{arcsen}(a)$.

Problema 2. Sea $x \in \mathbb{R}$. Calcular las sumas

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx), \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos(kx), \qquad \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(kx).$$

Problema 3. Sean $P_0, \ldots, P_{n-1}$ los vértices de un polígono regular inscrito en una circunferencia de radio 1. Denotemos por $|\overrightarrow{P_0P_k}|$ la longitud del vector $\overrightarrow{P_0P_k}$, esto es, la longitud del segmento P_0P_k. Demostrar que

$$\prod_{k=1}^{n-1} |\overrightarrow{P_0P_k}| = n.$$

Problema 4. Sean $x, a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$. Calcular las sumas

$$\sum_{k=0}^{n} a^k \cos(kx), \qquad \sum_{k=1}^{n} a^k \operatorname{sen}(kx).$$

Problema 5. Sea ε una n-ésima raíz de la unidad, es decir, un número real o complejo tal que $\varepsilon^n = 1$. Calcular la suma

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\varepsilon^k.$$

Problema 6. Calcular las sumas

$$\sum_{k=1}^{n} k\cos(kx), \qquad \sum_{k=1}^{n} k\operatorname{sen}(kx).$$

Problema 7. Calcular las sumas

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\cos\frac{2k\pi}{n}, \qquad \sum_{k=1}^{n-1} k\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}.$$

Problema 8. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Para cada una de las siguientes condiciones encontrar el lugar geométrico de los puntos $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen esta condición:

$$|z - z_1| = |z - z_2|, \quad |z - z_1| + |z - z_2| = 1, \quad |z - z_1| - |z - z_2| = 1, \quad |z - z_1| = \mathrm{Re}(z).$$

Problema 9. Sea $\mathbb{F}$ un campo infinito, sea P un polinomio de una variable con coeficientes pertenecientes a $\mathbb{F}$, y sea A un subconjunto infinito de $\mathbb{F}$, tal que para cada $a \in A$ se tiene $P(a) = 0$. Demostrar que P es el polinomio nulo, esto es, todos los coeficientes de P son cero. Mostrar que este resultado no se cumple, si $\mathbb{F}$ es un campo finito.

Problema 10. Sean $a_1, \ldots, a_n$ números complejos diferentes a pares y sea $p \in \{1, \ldots, n\}$. Hallar un polinomio P de grado $\leq n - 1$ tal que

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} \qquad P(a_j) = \delta_{j,p}.$$

Problema 11. Sean $a_1, \ldots, a_n$ números complejos diferentes a pares y sean $v_1, \ldots, v_n$ números complejos. Hallar un polinomio P de grado $\leq n - 1$ tal que

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} \qquad P(a_j) = v_j.$$

Problema 12. Sea P un polinomio de grado d de una variable compleja y sea n un entero positivo, $n > d$. Demostrar que $P(0)$ es el promedio de los valores de P en las raíces de la unidad de orden n.

Problema 13. Calcular el producto:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n}.$$

Problema 14. Calcular el cuadrado de la matriz S_n de tamaño $n \times n$ cuya entrada (j, k) es $\operatorname{sen} \frac{jk\pi}{n+1}$. En otras palabras, calcular S_n^2, donde

$$S_n = \left[\operatorname{sen} \frac{jk\pi}{n+1} \right]_{j,k=1}^{n}.$$

Vectores, matrices y espacios vectoriales

Problema 15. Consideramos el espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ de los polinomios de una variable con coeficientes complejos, de grado ≤ 2. Mostrar que los polinomios

$$b_0(x) := 1, \qquad b_1(x) := x - 3, \qquad b_2(x) = x^2 - 6x + 9,$$

forman una base de este espacio, la cual denotemos por $\mathcal{B}$. Además denotemos por $\mathcal{E}$ a la base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$. Encontrar las matrices de cambio entre estas dos bases. Dado un polinomio general $f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$, calcular sus coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}$.

Problema 16. Hallar una base del espacio de las matrices reales antisimétricas de tamaño 3×3.

Problema 17. Hallar el conjunto $\{X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C}) \colon \ AX = XA\}$, donde A es una matriz diagonal 3×3 con las entradas diagonales diferentes a pares.

Problema 18. Hallar el conjunto $\{X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})\colon\ AX = XA\}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Problema 19. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dados p, q en $\{1, \ldots, n\}$, denotamos por $E_{p,q}$ la matriz

$$E_{p,q} := \left[\delta_{p,j}\delta_{q,k}\right]_{j,k=1}^{n}.$$

Encuentre una fórmula para el producto $E_{p,q}E_{r,s}$. Muestre que las matrices $E_{p,q}$ con $p \neq q$ son divisores de cero. Sugerencia: calcule todos los productos $E_{p,q}E_{r,s}$ de manera explícita para $n = 2$.

Problema 20. Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ un homomorfismo de álgebras (es decir, un funcional lineal multiplicativo). Calcule $\varphi(E_{1,1})$ y $\varphi(I_n)$.

Sistemas de ecuaciones lineales

Problema 21. Para cada valor del parámetro p resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales para dos incógnitas:

$$2x_1 - 3x_2 = p, \qquad -4x_1 + 6x_2 = 10.$$

Problema 22. Para cada valor del parámetro p resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales para dos incógnitas:

$$px_1 + 4x_2 = 2, \qquad 9x_1 + px_2 = 3.$$

Matrices

Problema 23. Sea A una matriz cuadrada triangular inferior invertible. Demostrar que su inversa también es triangular inferior.

Problema 24. Sea P el conjunto de todos los conmutadores del álgebra $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$:

$$P = \{AB - BA\colon\ A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})\}.$$

Denotemos por S al subespacio del espacio $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ generado por el conjunto P. Calcular la dimensión de S. Sugerencia: primero encontrar una descripción explícita de S.

Problema 25. Sean $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$. Deducir una fórmula para el determinante de la matriz de Vandermonde $V(x_1, \ldots, x_n) := \left[x_j^{k-1}\right]_{j,k=1}^{n}$.

Problema 26. Sean a y b algunos números, $a \neq b$. Deducir una fórmula para el determinante de la siguiente matriz tridiagonal con diagonales constantes:

$$D_n = \begin{vmatrix} -(a+b) & ab & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -(a+b) & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -(a+b) & ab & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -(a+b) & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & -(a+b) & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -(a+b) \end{vmatrix}.$$

Problema 27. Sea $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|a\|_2 = 1$. Consideremos la función $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como la proyección ortogonal del espacio $\mathbb{R}^2$ sobre el subespacio generado por el vector a. Encontrar una fórmula para P y mostrar que P es un operador lineal. Hallar la matriz A asociada al operador lineal P respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Calcular los valores propios de A y explicar su sentido geométrico.

Problema 28. Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $\det(A) = 1$. Demostrar que A se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1/r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde $\theta, x \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Demostrar que esta descomposición es única.

Problema 29. Hallar la forma general de los elementos del subespacio S del espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices F y G:

$$F = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad G = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encontrar una matriz $H \in S$ que tenga propiedad involutiva ($H^2 = I_2$) y tal que las matrices I_2, H formen una base de S.

Matrices y operadores lineales

Problema 30. Denotamos por $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ al espacio de todas las sucesiones complejas y consideramos el operador lineal $T\colon \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ definido mediante la regla

$$(Tx)_j := x_{j+1} \qquad (j \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}).$$

Investigar si T es invertible por la izquierda; por la derecha.

Problema 31. Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matriz invertible por la derecha. Demostrar que A es invertible.

Problema 32. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Escribir al menos 20 condiciones equivalentes a la condición que la matriz A es invertible.

Problema 33. Sean V, W espacios vectoriales complejos, y sea $T\colon V \to W$ un operador lineal. Supongamos que el espacio V es de dimensión finita. Demostrar que

$$\dim(\mathrm{im}(T)) + \dim(\ker(T)) = \dim(V).$$

Problema 34. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C})$. Demostrar que

$$\mathrm{r}(AB) \leq \min\{\mathrm{r}(A), \mathrm{r}(B)\}.$$

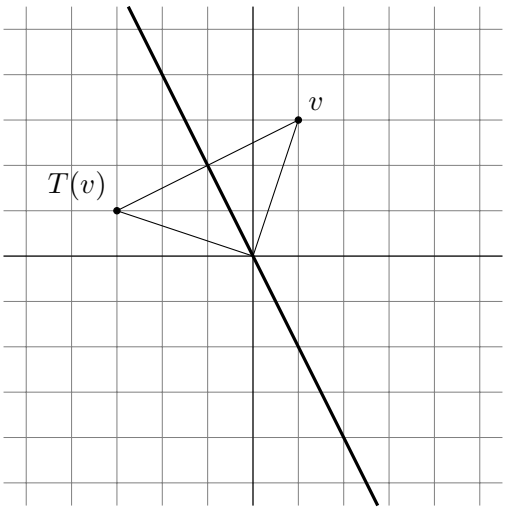
Problema 35. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, donde $m > n$. Demostrar que $AB \neq I_m$.

Problema 36. Demostrar que

$$\{uv^\top\colon\ u \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{m\times 1}\},\ v \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{n\times 1}\}\} = \{A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})\colon\ \mathrm{r}(A) = 1\}.$$

Problema 37. Sea $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|a\|_2 = 1$. Consideremos la función $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como la reflexión ortogonal del espacio $\mathbb{R}^2$ respecto al hiperplano $\{v \in \mathbb{R}^2\colon\ a^\top v = 0\}$. Encontrar una fórmula para R y mostrar que R es un operador lineal. Hallar la matriz B asociada al operador lineal R respecto a la base canónica del espacio $\mathbb{R}^n$. Mostrar que $B^\top = B$ y $B^2 = I_2$. Calcular los valores propios de B y explicar su sentido geométrico.

Problema 38. El operador lineal $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es el operador de reflexión ortogonal respecto a la recta $2x + y = 0$:



Calcular su matriz asociada respecto a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^2$. Calcular los valores y vectores propios del operador lineal T.

Valores propios y la función exponencial de matrices

Problema 39. Sea P un polinomio de una variable con coeficientes complejos, de grado n. Construir una matriz compleja A de tamaño $n \times n$ cuyo polinomio característico coincida con el polinomio P.

Problema 40. Calcular $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$, donde λ_1 y λ_2 son los valores propios de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Problema 41. Determinar para qué valores reales a, b la siguiente matriz es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Problema 42. Encontrar los valores propios de la matriz $A = \left[A_{j,k}\right]_{j,k=1}^{n}$ cuyos componentes están definidos mediante la siguiente regla:

$$A_{j,k} := \begin{cases} 2, & \text{si } j = k; \\ -1, & \text{si } |j-k| = 1; \\ 0, & \text{si } |j-k| \geq 2. \end{cases}$$

Sugerencia: deducir una fórmula recursiva para los polinomios característicos de A, luego comparar con la definición de los polinomios de Chebyshov y usar un cambio de variable trigonométrico. Otro camino: usar el resultado del Problema 26.

Problema 43. Encontrar los valores propios de la matriz $A = \left[A_{j,k}\right]_{j,k=1}^{n}$ cuyos componentes están definidos mediante la siguiente regla:

$$(A_n)_{j,k} = \begin{cases} 1, & \text{si } |j-k| = 1; \\ 0, & \text{si } |j-k| \neq 1. \end{cases}$$

Sugerencia: considerar los polinomios característicos $f_n(\lambda) := \det(\lambda I_n - A_n)$ y encuentrar una fórmula recursiva. Empezando con n pequeños, enconstrar una fórmula para $f_n\big(t+t^{-1}\big)$ y hacer el cambio de variable $\lambda = 2\cos(\vartheta)$.

Problema 44. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que A tiene n valores propios diferentes a pares: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Sean $v_1, \ldots, v_n$ algunos vectores propios asociados. Supongamos que $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ y

$$x = \sum_{k \in J} \alpha_k v_k,$$

donde $\alpha_k \neq 0$ para cada k. Muestre que los vectores v_k con $k \neq 0$ pertenecen al subespacio generado por los vectores x, Ax, $\ldots$, $A^{n-1}x$.

Problema 45. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que los valores propios de A son diferentes a pares. Describa todos los subespacios invariantes de A.

La función exponencial de matrices

Problema 46. Calcular $\exp(tA)$, donde A es cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Problema 47. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encontrar una matriz B tal que $A = \exp(B)$.

Operadores y matrices normales, autoadjuntos y unitarios

Problema 48. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Demostrar que existe una matriz unitaria U de tamaño $n \times n$ tal que la matriz U^*AU es triangular superior.

Problema 49. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matriz normal y al mismo tiempo triangular superior. Demostrar que la matriz A es diagonal.

Problema 50. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matriz normal. Demostrar que existe una matriz unitaria U de tamaño $n \times n$ tal que la matriz U^*AU es diagonal.

Problema 51. Sea $n \in \{2, 3, \ldots\}$ y sea $\omega_n = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{n}\,\mathrm{i}}$. Demostrar que la siguiente matriz es unitaria:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\omega_n^{jk}\right]_{j,k=0}^{n-1}.$$

Problema 52. Denotemos por S al conjunto de las matrices reales cuadradas simétricas de orden 2. Denotemos por $\cong$ a la relación binaria en S definida de la siguiente manera: $A \cong B$ si existe una matriz invertible P tal que $B = P^\top AP$. Mostrar que $\cong$ es una relación de equivalencia y calcular el número de las clases de equivalencia.

Problema 53. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz positiva definida, esto es,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\} \qquad x^\top Ax > 0.$$

Demostrar que existe una matriz real invertible B tal que $B^\top B = A$.

Grupos y divisibilidad

Problema 54. Enunciar y demostrar el teorema pequeño de Fermat.

Problema 55. Sea p un número primo. Demostrar que el grupo multiplicativo del campo $\mathbb{Z}_p$ es cíclico.

Problema 56. Encontrar todos los subgrupos normales del grupo S_3.

Problema 57. Sea H un subgrupo del grupo aditivo $\mathbb{R}$. Mostrar que H es denso en $\mathbb{R}$ o es de la forma $a\mathbb{Z}$ para algún $a > 0$.