División de polinomios

Objetivos. Demostrar el teorema sobre la división de polinomios (con resto).

Requisitos. Adición y multiplicación de polinomios, el grado de polinomios y sus propiedades.

1. Propiedades del grado de polinomios (repaso). Sean $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$. Entonces

$$\deg(f+g) \leqslant \max\{\deg(f), \deg(g)\}, \qquad \deg(fg) = \deg(f) + \deg(g).$$

Para que estas propiedades sean válidas sin excepciones, aceptamos el convenio que $\deg(\mathbf{0}_{\mathcal{P}}) = -\infty$.

2. Teorema de división de polinomios. Sean $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$, $g \neq \mathbf{0}_{\mathcal{P}}$. Entonces existe un único par (q, r) tal que $q, r \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$,

$$f = gq + r, \qquad \deg(r) < \deg(g).$$

Demostración de la unicidad. Supongamos que $q_1, r_1, q_2, r_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ tales que

$$f = gq_1 + r_1, \tag{1}$$
$$\deg(r_1) < \deg(g), \tag{2}$$
$$f = gq_2 + r_2, \tag{3}$$
$$\deg(r_2) < \deg(g). \tag{4}$$

Vamos a demostrar que $r_1 = r_2$ y $q_1 = q_2$. De las igualdades (1) y (3) obtenemos

$$gq_1 + r_1 = gq_2 + r_2,$$

esto es,

$$g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1. \tag{5}$$

De (2) y (4) concluimos que

$$\deg(r_1 - r_2) \leqslant \max\{\deg(r_1), \deg(r_2)\} < \deg(g).$$

Aplicamos a la igualdad (5) la regla que el grado del producto de polinomios es igual a la suma de sus grados:

$$\deg(g) + \deg(q_1 - q_2) = \deg(r_2 - r_1).$$

Tomando en cuenta que $\deg(r_2 - r_1) < \deg(g)$, concluimos que

$$\deg(q_1 - q_2) < 0.$$

El único polinomio cuyo grado es negativo es el polinomio cero. Por lo tanto, $q_1 - q_2 = \mathbf{0}_{\mathcal{P}}$, esto es, $q_1 = q_2$. Ahora de (5) sale que $r_2 - r_1 = \mathbf{0}_{\mathcal{P}}$, esto es, $r_1 = r_2$. $\square$

Demostración de la existencia. Reformulamos el enunciado de la siguiente manera. Sea $g \in \mathcal{P}(\mathbb{C}) \setminus \{\mathbf{0}_{\mathcal{P}}\}$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se cumple la siguiente afirmación $\mathcal{A}(n)$:

$$\forall f \in \mathcal{P}(\mathbb{C}) \qquad (\deg(f) \leqslant n) \quad \Rightarrow \quad (\exists q, r \in \mathcal{P}(\mathbb{C}) \quad f = gq + r \quad \wedge \quad \deg(r) < \deg(g)) \,.$$

Base de inducción. Demostremos $\mathcal{A}(0)$. Sea $f \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ tal que $\deg(f) \leqslant 0$, esto es, f es un polinomio constante: $f(x) = f_0 x^0$. Consideremos dos casos:

I. $\deg(g) > 0$. En este caso

$$f = g \cdot \underbrace{\mathbf{0}_{\mathcal{P}}}_{q} + \underbrace{f}_{r}\,.$$

II. $\deg(g) = 0$, esto es, $g(x) = g_0 x^0$. En este caso

$$f(x) = f_0 x^0 = (g_0 x^0) \underbrace{\left(\frac{f_0}{g_0} x^0\right)}_{q(x)} + \underbrace{\mathbf{0}_{\mathcal{P}}}_{r(x)}\,.$$

Paso de inducción. Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Supongamos $\mathcal{A}(n)$ y demostremos $\mathcal{A}(n+1)$. Sea $f \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ tal que $\deg(f) \leqslant n + 1$. Consideremos dos casos:

I. $\deg(f) < \deg(g)$. En este caso

$$f = g \cdot \underbrace{\mathbf{0}_{\mathcal{P}}}_{q} + \underbrace{f}_{r}\,.$$

II. $\deg(f) \geqslant \deg(g)$. Usemos la siguiente notación: $m = \deg(f)$, $p = \deg(g)$,

$$f(x) = f_m x^m + \sum_{j=0}^{m-1} f_j x^j, \qquad g(x) = g_p x^p + \sum_{k=0}^{p-1} g_k x^k.$$

Notemos que el monomio $f_m x^m$ se obtiene del monomio $g_p x^p$ al multiplicar el último por $\frac{f_m}{g_p} x^{m-p}$:

$$(g_p x^p) \left(\frac{f_m}{g_p} x^{m-p}\right) = f_m x^m.$$

Restamos de $f(x)$ un múltiplo de $g(x)$ de tal manera que se cancele el sumando $f_m x^m$:

$$h(x) := f(x) - g(x) \left(\frac{f_m}{g_p} x^{m-p}\right) = f_m x^m + \sum_{j=0}^{m-1} f_j x^j - \left(g_p x^p + \sum_{k=0}^{p-1} g_k x^k\right) \frac{f_m}{g_p} x^{m-p}$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} f_j x^j - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{f_m g_k}{g_p} x^{k+m-p}.$$

En la segunda suma hagamos el cambio de variable $j = k + m - p$:

$$h(x) = \sum_{j=0}^{m-1} f_j x^j - \sum_{j=m-p}^{m-1} \frac{f_m g_{j-m+p}}{g_p} x^j.$$

Ahora se ve que $\deg(h) \leqslant m-1$. Como $m \leqslant n+1$, concluimos que $\deg(h) \leqslant n$. Aplicamos la hipótesis de inducción al polinomio h y obtenemos un par de polinomios $\hat{q}, \hat{r} \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ tales que

$$h = g\hat{q} + \hat{r}, \qquad \deg(\hat{r}) < \deg(g).$$

Ahora expresamos f a través de h:

$$\begin{aligned} f(x) &= h(x) + g(x)\left(\frac{f_m}{g_p}x^{m-p}\right) = g(x)\hat{q}(x) + \hat{r}(x) + g(x)\left(\frac{f_m}{g_p}x^{m-p}\right) \\ &= g(x)\underbrace{\left(\frac{f_m}{g_p}x^{m-p} + \hat{q}(x)\right)}_{q(x)} + \underbrace{\hat{r}(x)}_{r(x)}. \end{aligned}$$

$\square$