Sumas parciales de la progresión geométrica. Deducción de la formula con la notación sigma

Objetivos. Deducir una fórmula para la suma $\sum_{k=0}^{n-1} q^k$.

Requisitos. Notación $\sum$, experiencia de trabajar con sumas de la forma

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^m.$$

Ejemplo y generalización (repaso)

1. Ejemplo. Calcular el producto $(1-q)(1+q+q^2+q^3+q^4)$.

Solución. Primero multiplicamos $1+q+q^2+q^3+q^4$ por 1, luego por $-q$. Expandimos los productos y simplificamos la suma:

$$(1-q)(1+q+q^2+q^3+q^4)$$

$$= 1+q+q^2+q^3+q^4 - \underbrace{\qquad}_{?} - \underbrace{\qquad}_{?} - \underbrace{\qquad}_{?} - \underbrace{\qquad}_{?} - \underbrace{\qquad}_{?} = \underbrace{\qquad}_{?} - \underbrace{\qquad}_{?}. \qquad \square$$

2. Generalización. Basándose en el ejemplo anterior adivine la fórmula general:

$$\boxed{(1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}) = \qquad\qquad\qquad}$$

3. Despeje la suma $1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}$ de la fórmula obtenida en el ejercicio anterior. Dividiendo entre $1-q$ hay que suponer que $1-q \neq 0$.

$$\boxed{1+q+q^2+\ldots+q^{n-1} = \qquad\qquad\qquad \text{donde} \quad q \neq \underbrace{\qquad}_{?}}$$

4. Caso excepcional $q = 1$ (repaso).
La suma $1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}$ consta de $\underbrace{\qquad}_{?}$ sumandos.

Por eso, si $q = 1$, entonces

$$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Notación breve para sumas (repaso)

El símbolo $\sum$ proviene de la letra griega "sigma" y se usa para denotar sumas.

5. Ejemplo. $$\sum_{j=3}^{6} a_j = \underbrace{a_3}_{a_j \text{ con } j=3} + \underbrace{\qquad}_{a_j \text{ con } j=4} + \underbrace{\qquad}_{a_j \text{ con } j=5} + \underbrace{\qquad}_{a_j \text{ con } j=6}.$$

6. Ejemplo. $$\sum_{k=2}^{4} 5^k = 5^2 + \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} = 25 + \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} = \underbrace{\qquad\quad}_{?}.$$

7. Escriba las siguientes sumas en forma explícita (todos los sumandos):

$$\sum_{k=0}^{4} q^k =$$

$$\sum_{j=2}^{5} \frac{1}{j} =$$

8. Escriba las siguientes sumas en forma breve, usando la notación $\sum$:

$$a_1 + a_2 + a_3 = \sum_{k=1}^{3} a_3; \qquad b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7 = \sum_{k=???}^{???} ??? = \sum_{k=} \underbrace{\qquad}_{?};$$

$$4 + 8 + 16 + 32 = \sum \underbrace{\qquad}_{2^?}; \qquad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \sum \qquad\qquad .$$

Cambio de variable en la suma (repaso)

9. Escriba en forma explícita las siguientes sumas y compare los resultados:

$$\sum_{j=4}^{6} a_j = \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?}; \qquad \sum_{k=7}^{9} a_{k-3} = \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?}.$$

10. Ejemplo.

$$\sum_{j=4}^{6} a_j = \begin{bmatrix} k = j+3 \\ j = k-3 \end{bmatrix} = \sum_{k=7}^{9} a_{k-2}.$$

11. Haga cambios de variables:

$$\sum_{j=3}^{8} a_j = \begin{bmatrix} k = j-2 \\ j = \underbrace{\qquad}_{?} \end{bmatrix} =$$

$$\sum_{j=4}^{7} a_{j+1} = \begin{bmatrix} k = j+1 \\ j = \underbrace{\qquad}_{?} \end{bmatrix} =$$

12. Escriba la siguiente suma en forma extensa (todos los sumandos) y luego en forma breve con una variable nueva:

$$\sum_{k=2}^{5} q^{k+1} = \underbrace{\qquad}_{\substack{q^{k+1} \\ \text{con } k=2}} + \underbrace{\qquad}_{\substack{q^{k+1} \\ \text{con } k=3}} + \underbrace{\qquad}_{\substack{q^{k+1} \\ \text{con } k=4}} + \underbrace{\qquad}_{\substack{q^{k+1} \\ \text{con } k=5}} = \sum_{p=???}^{???} q^p = \sum_{p=} q^p.$$

Ahora el mismo cambio de variable de manera formal:

$$\sum_{k=2}^{5} q^{k+1} = \begin{bmatrix} p = \underbrace{\qquad}_{?} \\ k = \underbrace{\qquad}_{?} \end{bmatrix} = \sum_{p=} q^p.$$

Separación del primer o último sumando de la suma (repaso)

13. Separación del primer sumando de la suma:

$$\sum_{j=1}^{4} a_j = \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} = a_1 + \Big(a_2 + \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?}\Big) = a_1 + \sum \underbrace{\qquad}_{?}.$$

14. Separación del último sumando de la suma:

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{7} c_k &= \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} \\ &= \Big(\underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?}\Big) + \underbrace{\qquad}_{?} = \sum \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?}.\end{aligned}$$

15. Separe el primer sumando de la suma:

$$\sum_{j=2}^{9} a_j = \underbrace{\qquad}_{?} + \sum \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Separe el último sumando de la suma:

$$\sum_{j=2}^{9} a_j = \sum \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Cancelación de sumandos (repaso)

16. Ejemplo. Escriba los sumandos de manera explícita y simplifique el resultado: Simplifique la suma:

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{6} a_j - \sum_{j=4}^{7} a_j &= \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} - \underbrace{\qquad}_{?} - \underbrace{\qquad}_{?} - \underbrace{\qquad}_{?} - \underbrace{\qquad}_{?} \\ &= \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} - \underbrace{\qquad}_{?}.\end{aligned}$$

17. Los cálculos del ejercicio anterior se pueden escribir de manera más formal usando la partición de sumas. Es importante comprender cuál conjunto de índices tienen dos sumas en común:

$$\{2,3,4,5,6\} \cap \{4,5,6,7\} = \{\underbrace{\qquad\qquad}_{?}\}.$$

Luego separar los sumandos correspondientes:

$$\sum_{j=2}^{6} a_j - \sum_{j=4}^{7} a_j = \left(\sum_{j=2}^{3} a_j + \sum_{j=}^{} a_j\right) - \left(\sum_{j=}^{} + \sum_{j=}^{} a_j\right) = \sum_{j=2}^{3} a_j - \sum_{j=}^{} a_j.$$

18. Simplifique la siguiente diferencia:

$$\sum_{j=0}^{7} a_j - \sum_{j=1}^{11} a_j =$$

Deducción formal de la fórmula para la suma finita de una progresión geométrica

19. Escriba la siguiente suma usando la notación $\sum$:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \sum_{j=???}^{???} q^j = \sum_{j=} \underbrace{\qquad}_{?} .$$

20. En la siguiente suma separe el primer sumando:

$$\sum_{j=0}^{n-1} q^j = \underbrace{\qquad}_{?} + \sum \underbrace{\qquad}_{?} .$$

21. Multiplique cada sumando por el factor q, haga el cambio de variable y separe el último sumando:

$$q \sum_{j=0}^{n-1} q^j = \sum_{j=0}^{n-1} q \cdot \underbrace{\qquad}_{?} = \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{\qquad\qquad}_{?} = \left[\begin{array}{l} k = j + 1 \\ j = \underbrace{\qquad}_{?} \end{array} \right]$$

$$= \sum_{k=} \underbrace{\qquad}_{?} = \left(\sum_{k=} \underbrace{\qquad}_{?} \right) + \underbrace{\qquad}_{?} .$$

22. Usando los resultados de los ejercicios anteriores simplifique la expresión:

$$(1 - q) \sum_{j=0}^{n-1} q^j =$$

23. Escriba la fórmula para la suma finita de la progresión geométrica:

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n-1} q^j = \qquad\qquad\qquad\qquad \text{donde} \qquad q \neq \underbrace{\qquad}_{?}}$$