Sumas parciales de la progresión geométrica

Casos particulares y generalización

1. Ejemplo. Calcule el producto $(1-q)(1+q+q^2+q^3)$.

Solución. Primero multiplicamos $1+q+q^2+q^3$ por 1, luego por $-q$:

$$\begin{aligned}(1-q)(1+q+q^2+q^3) &= 1+q+q^2+q^3\\ &\qquad -q-q^2-q^3-q^4\\ &= 1-q^4.\end{aligned}$$ □

2. Calcule el producto (escriba los cálculos intermedios):

$$\begin{aligned}(1-q)(1+q+q^2) &= \quad + \quad + \\ &\quad - \quad - \quad - \\ &= \end{aligned}$$

3. Calcule el producto:

$$(1-q)(1+q+q^2+q^3+q^4) = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

4. Escriba la fórmula general:

$$\boxed{(1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^m) = \qquad\qquad}$$

5. Despeje la suma $1+q+q^2+\ldots+q^m$ de la fórmula obtenida en el ejercicio anterior. Dividiendo entre $1-q$ suponemos que $1-q \neq 0$.

$$\boxed{1+q+q^2+\ldots+q^m = \qquad\qquad \text{donde} \quad q \neq \underbrace{\quad}_{?}}$$

Ecuación para las sumas parciales

6. Notación para las sumas parciales de la progresión geométrica. Vamos a escribir los razonamientos anteriores en otro estilo, usando el principio *denota y emperás*. Pongamos

$$S_n(q) \coloneqq 1 + q + q^2 + \cdots + q^n.$$

Por ejemplo,

$$S_4(q) = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4,$$

$$S_3(q) = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

7. Ecuación para $S_4(q)$. Recordamos que

$$S_4(q) = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4. \tag{1}$$

multiplicamos ambos lados de la igualdad (1) por q:

$$q\,S_4(q) = q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5. \tag{2}$$

Notamos que casi todos los sumandos del lado derecho de (2) coinciden con sumandos del lado derecho de (1). De la igualdad (1) restamos la igualdad (2):

$$S_4(q) - qS_4(q) = (1 + q + q^2 + q^3 + q^4) - (q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5).$$

Factorizamos $S_4(q)$ en el lado izquierdo y simplificamos el lado derecho:

$$S_4(q)\,(\underbrace{\qquad\qquad}_{?}) = \underbrace{\qquad\qquad\quad}_{?}.$$

Suponiendo que $q \neq 1$ despejamos $S_4(q)$:

$$S_4(q) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad.$$

8. Ecuación para $S_3(q)$. Escriba razonamientos similares para $S_3(q)$.

Ejemplos de aplicación de la fórmula

9. Escriba otra vez la fórmula para la suma finita de la progresión geométrica:

$$\boxed{1 + q + q^2 + \ldots + q^m = \qquad\qquad\qquad \text{donde} \quad q \neq \underbrace{\qquad}_{?}}$$

10. Aplique la fórmula del ejercicio anterior para calcular la siguiente suma:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \left[\begin{array}{l} q = \underbrace{\qquad}_{?} \\ m = \underbrace{\qquad}_{?} \end{array}\right] =$$

11. Calcule la siguiente suma:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} =$$

12. Leyenda sobre el inventor del ajedrez y granos de arroz.
Puede leer los detalles en:

http://javierarenzana.es/matematicas/curiosidades/la-leyenda-del-ajedrez.html

Cuenta la leyenda que un rey dijo al inventor de ajedrez que le pidiese lo que quisiera. El sabio le pidió: un grano de arroz por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta. . . y así sucesivamente, duplicando en cada casilla la cantidad de la anterior hasta llegar a la última (el tablero tiene 64 casillas). El monarca encantado por lo barato que le iba a resultar el juego tan genial, procedió a realizar el pago y. . . Cuenta el número de los granos que debería pagar el rey.

Caso excepcional $q = 1$

13. Notemos que la suma $1 + q + q^2 + q^3$ consta de $\underbrace{\qquad}_{?}$ sumandos.

14. En general, la suma $1 + q + q^2 + \ldots + q^m$ consta de $\underbrace{\qquad\quad}_{?}$ sumandos.

15. Si $q = 1$, entonces $1 + q + q^2 + \ldots + q^m = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$.

16. Escriba la fórmula general:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^m = \begin{cases} \qquad\qquad\qquad\qquad, & \text{si} \quad q \neq 1; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad, & \text{si} \quad q = 1. \end{cases}$$

A veces es necesario escribir la suma de la progresión geométrica hasta la potencia q^{n-1}.

17. Notemos que la suma $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$ consta de $\underbrace{\qquad}_{?}$ sumandos.

18. Si $q = 1$, entonces $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \underbrace{\qquad\quad}_{?}$.

19. Escriba la fórmula:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \begin{cases} \qquad\qquad\qquad\qquad, & \text{si} \quad q \neq 1; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad, & \text{si} \quad q = 1. \end{cases}$$