Engrape aquí
No doble

Álgebra I, licenciatura. Examen parcial III. Variante α.

Polinomios y sus raíces.

Apellidos y nombres:

Calificación (%):	examen escrito	tarea 3	partici-pación	parcial 3

Calificación final ordinaria (%):

$$\frac{\quad + \quad + \quad}{3} \approx \qquad .$$

Este examen parcial dura solamente 75 minutos. En los problemas teóricos hay que justificar todos los pasos y enunciar bien todos los hechos auxiliares que se utilizan.

Problema 1. *18 %.*
Criterio de invertibilidad en el anillo de polinomios. Sea $f \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

- existe $g \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ tal que $fg = 1_{\mathcal{P}}$.
- $\deg(f) = 0$.

Problema 2. *20 %.*
El conjunto de los máximos comunes divisores de dos polinomios, uno de los cuales es cero. Sea $f \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$, $f \neq 0_{\mathcal{P}}$.

I. Encuentre el conjunto de los divisores comunes de f y $0_{\mathcal{P}}$.

II. Utilizando el inciso I encuentre el conjunto de los máximos comunes divisores de f y $0_{\mathcal{P}}$.

Problema 3. *20 %.*
Criterio de polinomios primos relativos. Sean $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ dos polinomios no ambos cero. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\operatorname{MCD}(f, g) = \{h \in \mathcal{P}(\mathbb{C}) \colon \ \deg(h) = 0\}$.

(b) $\operatorname{mcd}(f, g) = 1$.

(c) $\mathcal{D}(f, g) = \{h \in \mathcal{P}(\mathbb{C}) \colon \ \deg(h) = 0\}$.

Problema 4. *18 %.*
Calcule el **máximo común divisor mónico** d de los polinomios dados f y g, y los polinomios de Bézout u y v tales que $fu + gv = d$. Compruebe que $d \mid f$, $d \mid g$ y $fu + gv = d$.

$$f(x) = 4x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 5x^2 - x, \qquad g(x) = -2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 3x.$$

Problema 5. *15 %.*
Encuentre todas las **raíces racionales** (con sus multiplicidades) del polinomio dado. Escriba el polinomio como un producto de polinomios de grado 1.

$$f(x) = 12x^4 - 28x^3 + x^2 + 29x - 12.$$

Problema 6. *18 %.*
Polinomio básico de Lagrange. Sean $a_1, \ldots, a_n$ algunos números complejos diferentes a pares. Construya un polinomio f de grado $n - 1$ tal que

$$f(a_1) = \ldots = f(a_{n-1}) = 0, \qquad f(a_n) = 1.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra I, licenciatura. Examen parcial III. Variante β.

Polinomios y sus raíces.

Apellidos y nombres:

Calificación (%):	examen escrito	tarea 3	partici-pación	parcial 3

Calificación final ordinaria (%):

$$\frac{\qquad + \qquad + \qquad}{3} \approx \qquad .$$

Este examen parcial dura solamente 75 minutos. En los problemas teóricos hay que justificar todos los pasos y enunciar bien todos los hechos auxiliares que se utilizan.

Problema 1. *18 %.*
Divisibilidad mútua de dos polinomios. Sean $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ tales que $f \mid g$ y $g \mid f$. Demuestre que existe $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $g = c_{\mathcal{P}} f$.

Problema 2. *20 %.*
Divisores comunes y división con resto. Sean $f, g, q, r \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ tales que $g \neq 0_{\mathcal{P}}$ y

$$f = gq + r.$$

I. Demuestre que el conjunto de los divisores comunes de f y g coincide con el conjunto de los divisores comunes de g y r.

II. Escriba la definición formal del conjunto $\operatorname{MCD}(f, g)$ de divisores comúnes máximos de f y g. Usando el resultado del inciso I haga una conclusión sobre $\operatorname{MCD}(f, g)$ y $\operatorname{MCD}(g, r)$, con una explicación muy breve.

Problema 3. *20 %.*
Polinomios reales cuadráticos con discriminante negativo son irreducibles sobre $\mathbb{R}$.

I. ¿Cuándo se dice que un polinomio f es irreducible sobre el campo $\mathbb{R}$?

II. Sea $f(x) = x^2 + px + q$, donde $p, q \in \mathbb{R}$ y $p^2 - 4q < 0$. Demuestre que f no tiene raíces reales.

III. Sea f el polinomio del inciso II. Demuestre que f es irreducible sobre $\mathbb{R}$.

Problema 4. *18 %.*
Calcule el **máximo común divisor mónico** d de los polinomios dados f y g, y los polinomios de Bézout u y v tales que $fu + gv = d$. Compruebe que $d \mid f$, $d \mid g$ y $fu + gv = d$.

$$f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 16x^2 + 12x, \qquad g(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 9x.$$

Problema 5. *15 %.*
Encuentre todas las **raíces racionales** (con sus multiplicidades) del polinomio dado. Escriba el polinomio como un producto de polinomios de grado 1.

$$f(x) = 6x^4 - 23x^3 + 8x^2 + 25x - 12.$$

Problema 6. *18 %.*
Factorización de un polinomio con coeficientes complejos. Sea $f \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ tal que $\deg(f) = n \geqslant 1$. Demuestre que existen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tales que

$$f(x) = c \prod_{j=1}^{n} (x - a_j).$$

Sugerencia: utilice el teorema principal del álgebra de polinomios.