Engrape aquí
No doble

Álgebra I, licenciatura. ETS. Variante α.

Números enteros, números complejos, polinomios, raíces de polinomios.

Apellidos y nombres:

El examen dura 120 minutos. Resolviendo los problemas teóricos (1, 3, 5) justifique bien todos los pasos.

Problema 1. *22 %.*
Sean a y b dos números enteros **primos relativos**: $a, b \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{mcd}(a, b) = 1$. Demuestre que $\operatorname{mcd}(a + b, a - b)$ es 1 o 2.

Problema 2. *18 %.*
Aplique el **algoritmo extendido de Euclides** para calcular el **máximo común divisor** d de los números

$$a = 176, \qquad b = 92,$$

y un par de números enteros u y v (llamados **coeficientes de Bézout**) tales que $au + bv = d$. Compruebe que $d \mid a$, $d \mid b$ y $au + bv = d$.

Problema 3. *22 %.*
Identidades trigonométricas de Lagrange. Usando números complejos y la fórmula para la suma de la progresión geométrica deduzca fórmulas para las siguientes dos sumas:

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta), \qquad \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(k\theta).$$

Problema 4. *18 %.*
Raíces de un número complejo. Resuelva la ecuación $z^3 = -27$ usando la forma polar (trigonométrica) de números complejos. Exprese cada solución particular en forma polar y en forma binomial (algebraica), además indíquela en el plano complejo. Haga comprobación en forma binonomial para algunas dos soluciones particulares.

Problema 5. *22 %.*
Sean $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$. Construya $u, v \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ tales que

$$(x - a)^3 u(x) + (x - b)v(x) = 1.$$

Problema 6. *18 %.*
Encuentre todas las **raíces racionales** (con sus multiplicidades) del polinomio dado. Escriba el polinomio como un producto de polinomios de grado 1.

$$f(x) = 6x^4 + 13x^3 - 10x^2 - 19x + 10.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra I, licenciatura. ETS. Variante β.

Números enteros, números complejos, polinomios, raíces de polinomios.

Apellidos y nombres:

El examen dura 120 minutos. Resolviendo los problemas teóricos (1, 3, 5) justifique bien todos los pasos.

Problema 1. *22 %.*
I. Escriba la definición del **máximo común divisor** de dos números enteros suponiendo que al menos uno de estos es distinto de cero. Justifique brevemente la existencia del máximo común divisor.

II. Sean $m, n, q, r \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $m = nq + r$. Demuestre que $\operatorname{mcd}(m, n) = \operatorname{mcd}(n, r)$.

Problema 2. *18 %.*
Resuelva la siguiente **ecuación cuadrática con coeficientes complejos.** Haga comprobaciones con las fórmulas de Vieta.

$$z^2 + (4 + 5\,i)z + (-3 + 11\,i) = 0.$$

Problema 3. *22 %.*
Sea $\alpha \in [0, \pi]$. **Escriba el número** $1 - \cos(\alpha) - i \operatorname{sen}(\alpha)$ **en forma trigonométrica.** En particular, encuentre su valor absoluto y su argumento principal. Tarea adicional: demuestre el mismo resultado con un razonamiento geométrico.

Problema 4. *18 %.*
Raíces de un número complejo. Resuelva la ecuación $z^8 = 1$ usando la forma polar (trigonométrica) de números complejos. Exprese cada solución particular en forma polar y en forma binomial (algebraica), además indíquela en el plano complejo. Haga comprobación en forma binomial para alguna solución particular que tenga parte real no nula y parte imaginaria no nula.

Problema 5. *22 %.*
Polinomio básico de Lagrange. Sean $a_1, \ldots, a_n$ algunos números complejos diferentes a pares. Construya un polinomio f de grado $n - 1$ tal que

$$f(a_1) = \ldots = f(a_{n-1}) = 0, \qquad f(a_n) = 1.$$

Problema 6. *18 %.*
Calcule el **máximo común divisor mónico** d de los polinomios dados f y g, y los polinomios de Bézout u y v tales que $fu + gv = d$. Compruebe que $d \mid f$, $d \mid g$ y $fu + gv = d$.

$$f(x) = -x^5 - 5x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 16x + 8, \qquad g(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 7x - 6.$$