Conexión entre los polinomios simétricos elementales y los polinomios simétricos homogéneos completos

Egor Maximenko,
en base de estudios conjuntos con Mario Alberto Moctezuma Salazar,
Luis Angel González Serrano y Román Higuera García

Seminario "Matrices y operadores" (http://esfm.egormaximenko.com/mo.html)

Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional, México

2020-10-28

Objetivo.

Estudiar dos demostraciones de la siguiente fórmula clásica:

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\,\mathrm{e}_{m-k}(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{h}_k(x_1,\ldots,x_n) = \delta_{m,0}.$$

Conocer un par de aplicaciones de esta fórmula.

Objetivo.

Estudiar dos demostraciones de la siguiente fórmula clásica:

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\,\mathrm{e}_{m-k}(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{h}_k(x_1,\ldots,x_n) = \delta_{m,0}.$$

Conocer un par de aplicaciones de esta fórmula.

Prerrequisitos:

- multiplicación de series de potencias,
- polinomios elementales y su función generadora,
- polinomios completos y su función generadora.

Plan

Multiplicación de series

$$\left(a_0t^0 + a_1t^1 + a_2t^2 + a_3t^3 + \cdots\right)\left(b_0t^0 + b_1t^1 + b_2t^2 + b_3t^3 + \cdots\right)$$

Multiplicación de series

$$\left(a_0 t^0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots\right)\left(b_0 t^0 + b_1 t^1 + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \cdots\right)$$

el coeficiente de t^0:

Multiplicación de series

$$(a_0t^0 + a_1t^1 + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots)\ (b_0t^0 + b_1t^1 + b_2t^2 + b_3t^3 + \dots)$$

el coeficiente de t^0: $\quad a_0b_0$

Multiplicación de series

$$\left(a_0t^0 + a_1t^1 + a_2t^2 + a_3t^3 + \ \cdots \right) \left(b_0t^0 + b_1t^1 + b_2t^2 + b_3t^3 + \ \cdots \right)$$

el coeficiente de t^0: a_0b_0

el coeficiente de t^1:

Multiplicación de series

$$(a_0t^0 + a_1t^1 + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots)(b_0t^0 + b_1t^1 + b_2t^2 + b_3t^3 + \dots)$$

el coeficiente de t^0: a_0b_0

el coeficiente de t^1: $a_1b_0 + a_0b_1$

Multiplicación de series

$$\left(a_0t^0 + a_1t^1 + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots \right) \left(b_0t^0 + b_1t^1 + b_2t^2 + b_3t^3 + \dots \right)$$

el coeficiente de t^0: a_0b_0

el coeficiente de t^1: $a_1b_0 + a_0b_1$

el coeficiente de t^2:

Multiplicación de series

$$(\,a_0t^0 \;+\; a_1t^1 \;+\; a_2t^2 \;+\; a_3t^3 \;+\; \cdots\,)\;(\,b_0t^0 \;+\; b_1t^1 \;+\; b_2t^2 \;+\; b_3t^3 \;+\; \cdots\,)$$

el coeficiente de t^0: $\quad a_0b_0$

el coeficiente de t^1: $\quad a_1b_0 + a_0b_1$

el coeficiente de t^2: $\quad a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2$

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k\right) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m, \qquad \text{donde} \qquad c_m = \sum_{k=0}^{m} a_{m-k} b_k.$$

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k\right) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m, \qquad \text{donde} \qquad c_m = \sum_{k=0}^{m} a_{m-k} b_k.$$

La fórmula para c_m involucra solamente sumas finitas de productos.

Se puede trabajar con series formales, es decir, con sucesiones de coeficientes.

$$(a_j)_{j=0}^{\infty} * (b_k)_{k=0}^{\infty} := \left(\sum_{k=0}^{m} a_{m-k} b_k\right)_{m=0}^{\infty}.$$

Plan

$$\mathrm{e}_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

$$\mathrm{h}_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2,$$

$$\mathrm{e}_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$\mathrm{e}_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

$$\mathrm{h}_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2,$$

$$\mathrm{e}_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \qquad \mathrm{h}_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$\mathrm{e}_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

$$\mathrm{h}_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2,$$

$$e_0(x_1, x_2, x_3) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \qquad h_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

$$h_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2,$$

$$\mathrm{e}_0(x_1, x_2, x_3) = 1, \qquad \mathrm{h}_0(x_1, x_2, x_3) = 1,$$

$$\mathrm{e}_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \qquad \mathrm{h}_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$\mathrm{e}_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

$$\mathrm{h}_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2,$$

$$\mathrm{e}_0(x_1, x_2, x_3) = 1, \qquad \mathrm{h}_0(x_1, x_2, x_3) = 1,$$

$$\mathrm{e}_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \qquad \mathrm{h}_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$\mathrm{e}_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

$$\mathrm{h}_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2,$$

$$\mathrm{e}_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3,$$

$$\mathrm{e}_0(x_1, x_2, x_3) = 1, \qquad \mathrm{h}_0(x_1, x_2, x_3) = 1,$$

$$\mathrm{e}_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \qquad \mathrm{h}_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$\mathrm{e}_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

$$\mathrm{h}_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2,$$

$$\mathrm{e}_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{h}_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_2x_3 \\ &\quad + x_1x_3^2 + x_2^3 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_3^3.\end{aligned}$$

Definiciones combinatorias de e_m y h_m

$$\mathrm{e}_m(x_1,\ldots,x_n) := \sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_m\le n} x_{j_1}\ x_{j_2}\ \cdots\ x_{j_m} = \sum_{\substack{p_1+\cdots+p_n=m \\ p_1,\ldots,p_m\in\{0,1\}}} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}.$$

(Suma sobre los subconjuntos de $\{1,\ldots,n\}$ de tamaño m.)

Definiciones combinatorias de e_m y h_m

$$\mathrm{e}_m(x_1,\ldots,x_n) := \sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_m\le n} x_{j_1}\,x_{j_2}\,\cdots\,x_{j_m} = \sum_{\substack{p_1+\cdots+p_n=m\\ p_1,\ldots,p_m\in\{0,1\}}} x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}.$$

(Suma sobre los subconjuntos de $\{1,\ldots,n\}$ de tamaño m.)

$$\mathrm{h}_m(x_1,\ldots,x_n) := \sum_{1\le j_1\le j_2\le\ldots\le j_m\le n} x_{j_1}\,x_{j_2}\,\cdots\,x_{j_m} = \sum_{\substack{p_1+\cdots+p_n=m\\ p_1,\ldots,p_m\ge 0}} x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}.$$

(Suma sobre los multisubconjuntos de tamaño m.)

$$\mathrm{e}_m(x_1, \ldots, x_n) \coloneqq \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_m \le n} x_{j_1} \, x_{j_2} \, \cdots \, x_{j_m}$$

$$\mathrm{h}_m(x_1, \ldots, x_n) \coloneqq \sum_{1 \le j_1 \le j_2 \le \ldots \le j_m \le n} x_{j_1} \, x_{j_2} \, \cdots \, x_{j_m}$$

$$\mathrm{e}_m(x_1,\ldots,x_n) \coloneqq \sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_m\le n} x_{j_1}\, x_{j_2}\, \cdots\, x_{j_m}$$

$$\mathrm{h}_m(x_1,\ldots,x_n) \coloneqq \sum_{1\le j_1\le j_2\le\ldots\le j_m\le n} x_{j_1}\, x_{j_2}\, \cdots\, x_{j_m}$$

Si $m<0$ o $m>n$, entonces $\mathrm{e}_m(x_1,\ldots,x_n)=0.$

$$\mathrm{e}_m(x_1,\ldots,x_n) \coloneqq \sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_m\le n} x_{j_1}\, x_{j_2} \,\cdots\, x_{j_m}$$

$$\mathrm{h}_m(x_1,\ldots,x_n) \coloneqq \sum_{1\le j_1\le j_2\le\ldots\le j_m\le n} x_{j_1}\, x_{j_2} \,\cdots\, x_{j_m}$$

Si $m<0$ o $m>n$, entonces $\mathrm{e}_m(x_1,\ldots,x_n)=0.$

Si $m<0$, entonces $\mathrm{h}_m(x_1,\ldots,x_n)=0.$

Fórmulas recursivas para e_m y h_m

$$\mathrm{e}_{m+1}(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) = \mathrm{e}_{m+1}(x_1,\ldots,x_n) + x_{n+1}\,\mathrm{e}_m(x_1,\ldots,x_n).$$

$$\mathrm{h}_{m+1}(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) = \mathrm{h}_{m+1}(x_1,\ldots,x_n) + x_{n+1}\,\mathrm{h}_m(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}).$$

Denotamos la lista $(x_1,\ldots,x_n)$ por x.

$$\mathrm{e}_{m+1}(x,x_{n+1}) = \mathrm{e}_{m+1}(x) + x_{n+1}\,\mathrm{e}_m(x).$$

$$\mathrm{h}_{m+1}(x,x_{n+1}) = \mathrm{h}_{m+1}(x) + x_{n+1}\,\mathrm{h}_m(x,x_{n+1}).$$

Funciones generadoras

$$\mathrm{E}(x)(t) \coloneqq \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{e}_m(x) t^m = \sum_{m=0}^{n} \mathrm{e}_m(x) t^m, \qquad \mathrm{H}(x)(t) \coloneqq \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{h}_m(x) t^m.$$

Usando las fórmulas recursivas para e_m y h_m, es fácil demostrar lo siguiente:

$$\mathrm{E}(x, x_{n+1})(t) = \mathrm{E}(x)(t)\,(1 + x_{n+1} t), \qquad \mathrm{H}(x, x_{n+1})(t)\,(1 - x_{n+1} t) = \mathrm{H}(x)(t).$$

Aplicando la inducción sobre n obtenemos

$$\mathrm{E}(x)(t) = \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k t), \qquad \mathrm{H}(x)(t) \prod_{k=1}^{n} (1 - x_k t) = 1.$$

Relación entre las funciones generadoras $\mathrm{E}(x)(t)$ y $\mathrm{H}(x)(t)$

$$\mathrm{E}(x)(t) = \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k t), \qquad \mathrm{H}(x)(t) \prod_{k=1}^{n} (1 - x_k t) = 1.$$

Relación entre las funciones generadoras $\mathrm{E}(x)(t)$ y $\mathrm{H}(x)(t)$

$$\mathrm{E}(x)(t) = \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k t), \qquad \mathrm{H}(x)(t) \prod_{k=1}^{n} (1 - x_k t) = 1.$$

De aquí obtenemos

$$\mathrm{E}(x)(-t)\ \mathrm{H}(x)(t)\ =\ 1.$$

Fórmula de Vieta

$$(t - x_1)(t - x_2) = t^2 - (x_1 + x_2)t + x_1 x_2.$$

$$(t - x_1)(t - x_2) = \mathrm{e}_0(x_1, x_2)t^2 - \mathrm{e}_1(x_1, x_2)t^1 + \mathrm{e}_2(x_1, x_2)t^0.$$

Fórmula de Vieta

$$(t - x_1)(t - x_2) = t^2 - (x_1 + x_2)t + x_1 x_2.$$

$$(t - x_1)(t - x_2) = \mathrm{e}_0(x_1, x_2)t^2 - \mathrm{e}_1(x_1, x_2)t^1 + \mathrm{e}_2(x_1, x_2)t^0.$$

$$\prod_{k=1}^{n}(t - x_k) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\,\mathrm{e}_{n-k}(x_1, \ldots, x_n)\,t^k = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\,\mathrm{e}_j(x_1, \ldots, x_n)\,t^{n-j}.$$

Fórmula de Vieta

$$(t - x_1)(t - x_2) = t^2 - (x_1 + x_2)t + x_1 x_2.$$

$$(t - x_1)(t - x_2) = \mathrm{e}_0(x_1, x_2)t^2 - \mathrm{e}_1(x_1, x_2)t^1 + \mathrm{e}_2(x_1, x_2)t^0.$$

$$\prod_{k=1}^{n} (t - x_k) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\, \mathrm{e}_{n-k}(x_1, \ldots, x_n)\, t^k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j\, \mathrm{e}_j(x_1, \ldots, x_n)\, t^{n-j}.$$

Corolario (sustituimos $t = x_q$):

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\, \mathrm{e}_{n-k}(x_1, \ldots, x_n)\, x_q^k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j\, \mathrm{e}_j(x_1, \ldots, x_n)\, x_q^{n-j} = 0.$$

Polinomios completos en términos de progresiones geométricas

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{h}_m(x) t^m = \mathrm{H}(x)(t) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (1 - x_k t)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{1 - x_k t}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{n-1}}{(1 - x_k t) \prod_{s \neq k} (x_k - x_s)} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{m+n-1}}{\prod_{s \neq k} (x_k - x_s)} \right) t^m.$$

$$\mathrm{h}_m(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{m+n-1}}{\prod_{s \neq k} (x_k - x_s)}.$$

Polinomios completos en términos de progresiones geométricas

Hemos demostrado que para m en $\mathbb{N}_0$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{m+n-1}}{\prod\limits_{s\neq k}(x_k - x_s)} = \mathrm{h}_m(x).$$

Polinomios completos en términos de progresiones geométricas

Hemos demostrado que para m en $\mathbb{N}_0$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{m+n-1}}{\prod\limits_{s \neq k} (x_k - x_s)} = \mathrm{h}_m(x).$$

Ejercicio: demostrar que para $1 - n \leq m \leq -1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{m+n-1}}{\prod\limits_{s \neq k} (x_k - x_s)} = 0 = \mathrm{h}_m(x).$$

Plan

Conexión entre los polinomios elementales y completos

Teorema

Para cada m en $\mathbb{N}_0$,

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \, \mathrm{e}_{m-k}(x_1,\ldots,x_n) \, \mathrm{h}_k(x_1,\ldots,x_n) = \delta_{m,0}.$$

Conexión entre los polinomios elementales y completos

Teorema

Para cada m en $\mathbb{N}_0$,

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k}\, \mathrm{e}_{m-k}(x_1,\ldots,x_n)\, \mathrm{h}_k(x_1,\ldots,x_n) = \delta_{m,0}.$$

Como $\mathrm{e}_j(x_1,\ldots,x_n) = 0$ para $j > n$, podemos cortar la suma:

$$\sum_{k=\max\{m-n,0\}}^{m} (-1)^{m-k}\, \mathrm{e}_{m-k}(x_1,\ldots,x_n)\, \mathrm{h}_k(x_1,\ldots,x_n) = \delta_{m,0}.$$

Primera demostración (multiplicamos las funciones generadoras)

$$\mathrm{E}(x)(-t)\ \mathrm{H}(x)(t)\ =\ 1.$$

$$(\mathrm{e}_0(x)t^0 - \mathrm{e}_1(x)t^1 + \mathrm{e}_2(x)t^2 + \ldots)\,(\mathrm{h}_0(x)t^0 + \mathrm{h}_1(x)t^1 + \mathrm{h}_2(x)t^2 + \ldots)\ =\ t^0.$$

Multiplicamos las series en el lado izquierdo e igualamos las potencias de t:

$$\begin{aligned}
t^0: &\quad \mathrm{e}_0(x)\,\mathrm{h}_0(x) = 1,\\
t^1: &\quad -\mathrm{e}_1(x)\,\mathrm{h}_0(x) + \mathrm{e}_0(x)\,\mathrm{h}_1(x) = 0,\\
t^2: &\quad \mathrm{e}_2(x)\,\mathrm{h}_0(x) - \mathrm{e}_1(x)\,\mathrm{h}_1(x) + \mathrm{e}_0(x)\,\mathrm{h}_2(x) = 0,\\
&\quad \ldots
\end{aligned}$$

Primera demostración (multiplicamos las funciones generadoras)

$$\mathrm{E}(x)(-t)\ \mathrm{H}(x)(t) = 1.$$

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\,\mathrm{e}_j(x)\,t^j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{h}_k(x)\,t^k\right) = 1.$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\,\mathrm{e}_{m-k}(x)\,\mathrm{h}_k(x)\right)t^m = \sum_{m=0}^{\infty}\delta_{m,0}t^m.$$

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\,\mathrm{e}_{m-k}(x)\,\mathrm{h}_k(x) = \delta_{m,0}.$$

Segunda demostración (progresiones geométricas y Vieta)

Para $m \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k}\, \mathrm{e}_{m-k}(x)\, \mathrm{h}_k(x)$$

Segunda demostración (progresiones geométricas y Vieta)

Para $m \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k}\, \mathrm{e}_{m-k}(x)\, \mathrm{h}_k(x) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j\, \mathrm{e}_j(x)\, \mathrm{h}_{m-j}(x)$$

Segunda demostración (progresiones geométricas y Vieta)

Para $m \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \, \mathrm{e}_{m-k}(x) \, \mathrm{h}_k(x) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \, \mathrm{e}_j(x) \, \mathrm{h}_{m-j}(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \, \mathrm{e}_j(x) \, \mathrm{h}_{m-j}(x)$$

Segunda demostración (progresiones geométricas y Vieta)

Para $m \geq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k}\, \mathrm{e}_{m-k}(x)\, \mathrm{h}_k(x) &= \sum_{j=0}^{m} (-1)^j\, \mathrm{e}_j(x)\, \mathrm{h}_{m-j}(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j\, \mathrm{e}_j(x)\, \mathrm{h}_{m-j}(x) \\ &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j\, \mathrm{e}_j(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{m-j+n-1}}{\prod\limits_{\substack{1 \leq q \leq n \\ q \neq k}} (x_k - x_q)}\end{aligned}$$

Segunda demostración (progresiones geométricas y Vieta)

Para $m \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \, \mathrm{e}_{m-k}(x) \, \mathrm{h}_k(x) &= \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \, \mathrm{e}_j(x) \, \mathrm{h}_{m-j}(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \, \mathrm{e}_j(x) \, \mathrm{h}_{m-j}(x) \\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \, \mathrm{e}_j(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{m-j+n-1}}{\prod\limits_{\substack{1 \leq q \leq n \\ q \neq k}} (x_k - x_q)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{m-1}}{\prod\limits_{\substack{1 \leq q \leq n \\ q \neq k}} (x_k - x_q)} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \, \mathrm{e}_j(x) x_k^{n-j}
\end{aligned}$$

Segunda demostración (progresiones geométricas y Vieta)

Para $m \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \,\mathrm{e}_{m-k}(x)\,\mathrm{h}_k(x) &= \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \,\mathrm{e}_j(x)\,\mathrm{h}_{m-j}(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \,\mathrm{e}_j(x)\,\mathrm{h}_{m-j}(x) \\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \,\mathrm{e}_j(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{m-j+n-1}}{\prod\limits_{\substack{1\leq q\leq n\\ q\neq k}} (x_k - x_q)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{m-1}}{\prod\limits_{\substack{1\leq q\leq n\\ q\neq k}} (x_k - x_q)} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \,\mathrm{e}_j(x) x_k^{n-j} = 0.
\end{aligned}$$

Plan

Hemos demostrado que

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k}\, \mathrm{e}_{m-k}(x_1,\ldots,x_n)\, \mathrm{h}_k(x_1,\ldots,x_n) = \delta_{m,0} \qquad (m \in \mathbb{N}_0).$$

Hemos demostrado que

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k}\, \mathrm{e}_{m-k}(x_1,\ldots,x_n)\, \mathrm{h}_k(x_1,\ldots,x_n) = \delta_{m,0} \qquad (m \in \mathbb{N}_0).$$

Hoy veremos dos aplicaciones inmediatas:

- la forma matricial de estas identidades,
- $\mathrm{h}_0, \mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2, \ldots$ se expresan en términos de $\mathrm{e}_0, \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots$, y viceversa.

Hemos demostrado que

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k}\, \mathrm{e}_{m-k}(x_1,\ldots,x_n)\, \mathrm{h}_k(x_1,\ldots,x_n) = \delta_{m,0} \qquad (m \in \mathbb{N}_0).$$

Hoy veremos dos aplicaciones inmediatas:

- la forma matricial de estas identidades,
- $\mathrm{h}_0, \mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2, \ldots$ se expresan en términos de $\mathrm{e}_0, \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots$, y viceversa.

Luego veremos otras aplicaciones:

- la fórmula dual de Jacobi–Trudi para los polinomios de Schur sesgados,
- la fórmula para los menores de matrices de Toeplitz de banda.

Matrices de Toeplitz triangulares formadas por e_j y h_k

Sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y sea $r \in \mathbb{N}$. Puede ser $r > n$ o $r \le n$, no importa.

$$A_r := \left[(-1)^{j-k}\,\mathrm{e}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r}, \qquad B_r := \left[\mathrm{h}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r}.$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} \mathrm{e}_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{e}_2 & -\mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{e}_3 & \mathrm{e}_2 & -\mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_0 & 0 \\ \mathrm{e}_4 & -\mathrm{e}_3 & \mathrm{e}_2 & -\mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_0 \end{bmatrix}, \qquad B_5 = \begin{bmatrix} \mathrm{h}_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{h}_1 & \mathrm{h}_0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{h}_2 & \mathrm{h}_1 & \mathrm{h}_0 & 0 & 0 \\ \mathrm{h}_3 & \mathrm{h}_2 & \mathrm{h}_1 & \mathrm{h}_0 & 0 \\ \mathrm{h}_4 & \mathrm{h}_3 & \mathrm{h}_2 & \mathrm{h}_1 & \mathrm{h}_0 \end{bmatrix}.$$

Matrices de Toeplitz triangulares formadas por e_j y h_k

Sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y sea $r \in \mathbb{N}$. Puede ser $r > n$ o $r \le n$, no importa.

$$A_r := \left[(-1)^{j-k}\,\mathrm{e}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r}, \qquad B_r := \left[\mathrm{h}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r}.$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} \mathrm{e}_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{e}_2 & -\mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{e}_3 & \mathrm{e}_2 & -\mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_0 & 0 \\ \mathrm{e}_4 & -\mathrm{e}_3 & \mathrm{e}_2 & -\mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_0 \end{bmatrix}, \qquad B_5 = \begin{bmatrix} \mathrm{h}_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{h}_1 & \mathrm{h}_0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{h}_2 & \mathrm{h}_1 & \mathrm{h}_0 & 0 & 0 \\ \mathrm{h}_3 & \mathrm{h}_2 & \mathrm{h}_1 & \mathrm{h}_0 & 0 \\ \mathrm{h}_4 & \mathrm{h}_3 & \mathrm{h}_2 & \mathrm{h}_1 & \mathrm{h}_0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio: calcular el producto $A_5 B_5$.

Proposición

Sean $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $r \in \mathbb{N}$,

$$A_r := \left[(-1)^{j-k}\,\mathrm{e}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r}, \qquad B_r := \left[\mathrm{h}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r}.$$

Entonces $A_r B_r = I_r$.

Proposición

Sean $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $r \in \mathbb{N}$,

$$A_r := \left[(-1)^{j-k}\, \mathrm{e}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r}, \qquad B_r := \left[\mathrm{h}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r}.$$

Entonces $A_r B_r = I_r$.

Demostración.

$$(A_r B_r)_{p,q} =$$

Proposición

Sean $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $r \in \mathbb{N}$,

$$A_r := \left[(-1)^{j-k}\,\mathrm{e}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r}, \qquad B_r := \left[\mathrm{h}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r}.$$

Entonces $A_r B_r = I_r$.

Demostración.

$$(A_r B_r)_{p,q} = \sum_{s=1}^{r} (-1)^{p-s}\,\mathrm{e}_{p-s}\,\mathrm{h}_{s-q}$$

Proposición

Sean $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $r \in \mathbb{N}$,

$$A_r := \left[(-1)^{j-k}\,\mathrm{e}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r}, \qquad B_r := \left[\mathrm{h}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r}.$$

Entonces $A_r B_r = I_r$.

Demostración.

$$(A_r B_r)_{p,q} = \sum_{s=1}^{r} (-1)^{p-s}\,\mathrm{e}_{p-s}\,\mathrm{h}_{s-q} \overset{k=s-q}{=\!=\!=} \sum_{k=1-q}^{r-q} (-1)^{p-q-k}\,\mathrm{e}_{p-q-k}\,\mathrm{h}_k$$

Proposición

Sean $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $r \in \mathbb{N}$,

$$A_r := \left[(-1)^{j-k}\, \mathrm{e}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r}, \qquad B_r := \left[\mathrm{h}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r}.$$

Entonces $A_r B_r = I_r$.

Demostración.

$$(A_r B_r)_{p,q} = \sum_{s=1}^{r} (-1)^{p-s}\, \mathrm{e}_{p-s}\, \mathrm{h}_{s-q} \overset{k=s-q}{=\!=\!=} \sum_{k=1-q}^{r-q} (-1)^{p-q-k}\, \mathrm{e}_{p-q-k}\, \mathrm{h}_k$$

$$\underset{1-q\le 0}{\overset{r-q\le p-q}{=\!=\!=}} \sum_{k=0}^{p-q} (-1)^{p-q-k}\, \mathrm{e}_{p-q-k}\, \mathrm{h}_k$$

Proposición

Sean $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $r \in \mathbb{N}$,

$$A_r := \left[(-1)^{j-k}\,\mathrm{e}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r}, \qquad B_r := \left[\mathrm{h}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r}.$$

Entonces $A_r B_r = I_r$.

Demostración.

$$(A_r B_r)_{p,q} = \sum_{s=1}^{r} (-1)^{p-s}\,\mathrm{e}_{p-s}\,\mathrm{h}_{s-q} \overset{k=s-q}{=\!=\!=} \sum_{k=1-q}^{r-q} (-1)^{p-q-k}\,\mathrm{e}_{p-q-k}\,\mathrm{h}_k$$

$$\underset{1-q\le 0}{\overset{r-q\le p-q}{=\!=\!=}} \sum_{k=0}^{p-q} (-1)^{p-q-k}\,\mathrm{e}_{p-q-k}\,\mathrm{h}_k = \delta_{p-q,0}$$

Proposición

Sean $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $r \in \mathbb{N}$,

$$A_r := \left[(-1)^{j-k}\,\mathrm{e}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r}, \qquad B_r := \left[\mathrm{h}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r}.$$

Entonces $A_r B_r = I_r$.

Demostración.

$$(A_r B_r)_{p,q} = \sum_{s=1}^{r} (-1)^{p-s}\,\mathrm{e}_{p-s}\,\mathrm{h}_{s-q} \xlongequal{k=s-q} \sum_{k=1-q}^{r-q} (-1)^{p-q-k}\,\mathrm{e}_{p-q-k}\,\mathrm{h}_k$$

$$\xlongequal[1-q\le 0]{r-q\le p-q} \sum_{k=0}^{p-q} (-1)^{p-q-k}\,\mathrm{e}_{p-q-k}\,\mathrm{h}_k = \delta_{p-q,0} = \delta_{p,q}$$

Proposición

Sean $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $r \in \mathbb{N}$,

$$A_r := \left[(-1)^{j-k}\, \mathrm{e}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r}, \qquad B_r := \left[\mathrm{h}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r}.$$

Entonces $A_r B_r = I_r$.

Demostración.

$$(A_r B_r)_{p,q} = \sum_{s=1}^{r} (-1)^{p-s}\, \mathrm{e}_{p-s}\, \mathrm{h}_{s-q} \overset{k=s-q}{=\!=\!=} \sum_{k=1-q}^{r-q} (-1)^{p-q-k}\, \mathrm{e}_{p-q-k}\, \mathrm{h}_k$$

$$\underset{1-q\le 0}{\overset{r-q\le p-q}{=\!=\!=}} \sum_{k=0}^{p-q} (-1)^{p-q-k}\, \mathrm{e}_{p-q-k}\, \mathrm{h}_k = \delta_{p-q,0} = \delta_{p,q} = (I_r)_{p,q}.$$

En vez de matrices de Toeplitz triangulares inferiores,
se pueden considerar matrices de Toeplitz triangulares superiores:

$$\left[(-1)^{k-j}\,\mathrm{e}_{k-j}(x)\right]_{j,k=1}^{r}\,\left[\mathrm{h}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r} = I_r.$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}_0 & -\mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_2 & -\mathrm{e}_3 & \mathrm{e}_4 \\ 0 & \mathrm{e}_0 & -\mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_2 & -\mathrm{e}_3 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}_0 & -\mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}_0 & -\mathrm{e}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{h}_0 & \mathrm{h}_1 & \mathrm{h}_2 & \mathrm{h}_3 & \mathrm{h}_4 \\ 0 & \mathrm{h}_0 & \mathrm{h}_1 & \mathrm{h}_2 & \mathrm{h}_3 \\ 0 & 0 & \mathrm{h}_0 & \mathrm{h}_1 & \mathrm{h}_2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{h}_0 & \mathrm{h}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{h}_0 \end{bmatrix} = I_5.$$

Otra aplicación: $\mathrm{h}_0, \mathrm{h}_1, \ldots$ se expresan en términos de $\mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{e}_n$

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \, \mathrm{e}_j(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{h}_{m-j}(x_1, \ldots, x_n) = \delta_{m,0} \qquad (m \in \mathbb{N}_0).$$

Otra aplicación: $\mathrm{h}_0, \mathrm{h}_1, \ldots$ se expresan en términos de $\mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{e}_n$

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \, \mathrm{e}_j(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{h}_{m-j}(x_1, \ldots, x_n) = \delta_{m,0} \qquad (m \in \mathbb{N}_0).$$

$$\mathrm{e}_0 \, \mathrm{h}_0 = 1$$

Otra aplicación: $\mathrm{h}_0, \mathrm{h}_1, \ldots$ se expresan en términos de $\mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{e}_n$

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \, \mathrm{e}_j(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{h}_{m-j}(x_1, \ldots, x_n) = \delta_{m,0} \qquad (m \in \mathbb{N}_0).$$

$$\mathrm{e}_0 \, \mathrm{h}_0 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{h}_0 = 1$$

Otra aplicación: $\mathrm{h}_0, \mathrm{h}_1, \ldots$ se expresan en términos de $\mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{e}_n$

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \, \mathrm{e}_j(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{h}_{m-j}(x_1, \ldots, x_n) = \delta_{m,0} \qquad (m \in \mathbb{N}_0).$$

$$\mathrm{e}_0 \, \mathrm{h}_0 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{h}_0 = 1$$

$$\mathrm{e}_0 \, \mathrm{h}_1 - \mathrm{e}_1 \, \mathrm{h}_0 = 0$$

Otra aplicación: $\mathrm{h}_0, \mathrm{h}_1, \ldots$ se expresan en términos de $\mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{e}_n$

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \,\mathrm{e}_j(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{h}_{m-j}(x_1, \ldots, x_n) = \delta_{m,0} \qquad (m \in \mathbb{N}_0).$$

$$\mathrm{e}_0\,\mathrm{h}_0 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{h}_0 = 1$$

$$\mathrm{e}_0\,\mathrm{h}_1 - \mathrm{e}_1\,\mathrm{h}_0 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{h}_1 = \mathrm{e}_1\,\mathrm{h}_0$$

Otra aplicación: $\mathrm{h}_0, \mathrm{h}_1, \ldots$ se expresan en términos de $\mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{e}_n$

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \,\mathrm{e}_j(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{h}_{m-j}(x_1, \ldots, x_n) = \delta_{m,0} \qquad (m \in \mathbb{N}_0).$$

$$\mathrm{e}_0\,\mathrm{h}_0 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{h}_0 = 1$$

$$\mathrm{e}_0\,\mathrm{h}_1 - \mathrm{e}_1\,\mathrm{h}_0 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{h}_1 = \mathrm{e}_1\,\mathrm{h}_0$$

$$\mathrm{e}_0\,\mathrm{h}_2 - \mathrm{e}_1\,\mathrm{h}_1 + \mathrm{e}_2\,\mathrm{h}_0 = 0$$

Otra aplicación: $\mathrm{h}_0, \mathrm{h}_1, \ldots$ se expresan en términos de $\mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{e}_n$

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \, \mathrm{e}_j(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{h}_{m-j}(x_1, \ldots, x_n) = \delta_{m,0} \qquad (m \in \mathbb{N}_0).$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}_0 \, \mathrm{h}_0 = 1 && \Longrightarrow && \mathrm{h}_0 = 1 \\
&\mathrm{e}_0 \, \mathrm{h}_1 - \mathrm{e}_1 \, \mathrm{h}_0 = 0 && \Longrightarrow && \mathrm{h}_1 = \mathrm{e}_1 \, \mathrm{h}_0 \\
&\mathrm{e}_0 \, \mathrm{h}_2 - \mathrm{e}_1 \, \mathrm{h}_1 + \mathrm{e}_2 \, \mathrm{h}_0 = 0 && \Longrightarrow && \mathrm{h}_2 = \mathrm{e}_1 \, \mathrm{h}_1 - \mathrm{e}_2 \, \mathrm{h}_0 \, .
\end{aligned}$$

Otra aplicación: $\mathrm{h}_0, \mathrm{h}_1, \ldots$ se expresan en términos de $\mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{e}_n$

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \,\mathrm{e}_j(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{h}_{m-j}(x_1,\ldots,x_n) = \delta_{m,0} \qquad (m \in \mathbb{N}_0).$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}_0\,\mathrm{h}_0 = 1 && \Longrightarrow && \mathrm{h}_0 = 1\\
&\mathrm{e}_0\,\mathrm{h}_1 - \mathrm{e}_1\,\mathrm{h}_0 = 0 && \Longrightarrow && \mathrm{h}_1 = \mathrm{e}_1\,\mathrm{h}_0\\
&\mathrm{e}_0\,\mathrm{h}_2 - \mathrm{e}_1\,\mathrm{h}_1 + \mathrm{e}_2\,\mathrm{h}_0 = 0 && \Longrightarrow && \mathrm{h}_2 = \mathrm{e}_1\,\mathrm{h}_1 - \mathrm{e}_2\,\mathrm{h}_0\,.
\end{aligned}$$

$$\mathrm{h}_m(x) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1}\,\mathrm{e}_j(x)\,\mathrm{h}_{m-j}(x)$$

Otra aplicación: $h_0, h_1, \ldots$ se expresan en términos de $e_0, \ldots, e_n$

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \, e_j(x_1, \ldots, x_n) \, h_{m-j}(x_1, \ldots, x_n) = \delta_{m,0} \qquad (m \in \mathbb{N}_0).$$

$$e_0 \, h_0 = 1 \quad \Longrightarrow \quad h_0 = 1$$

$$e_0 \, h_1 - e_1 \, h_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad h_1 = e_1 \, h_0$$

$$e_0 \, h_2 - e_1 \, h_1 + e_2 \, h_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad h_2 = e_1 \, h_1 - e_2 \, h_0 \, .$$

$$h_m(x) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \, e_j(x) \, h_{m-j}(x) = \sum_{j=1}^{\min\{m,n\}} (-1)^{j-1} \, e_j(x) \, h_{m-j}(x) \qquad (m \geq 1).$$

Esquema de cálculo de $\mathrm{h}_0, \mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2, \ldots$ en términos de $\mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{e}_n$

$$\mathrm{h}_m(x) = \sum_{j=1}^{\min\{m,n\}} (-1)^{j-1}\, \mathrm{e}_j(x)\, \mathrm{h}_{m-j}(x) \qquad (m \geq 1).$$

Esquema para $n = 2$:

e_0 e_1 e_2

h_0 h_1 h_2 h_3 h_4 h_5

Esquema de cálculo de $\mathrm{h}_0, \mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2, \ldots$ en términos de $\mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{e}_n$

$$\mathrm{h}_m(x) = \sum_{j=1}^{\min\{m,n\}} (-1)^{j-1}\,\mathrm{e}_j(x)\,\mathrm{h}_{m-j}(x) \qquad (m \geq 1).$$

Esquema para $n = 2$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{e}_0 \arrow[d] & \mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_2 & & & \\ \mathrm{h}_0 & \mathrm{h}_1 & \mathrm{h}_2 & \mathrm{h}_3 & \mathrm{h}_4 & \mathrm{h}_5 \end{tikzcd}$$

Esquema de cálculo de $\mathrm{h}_0, \mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2, \ldots$ en términos de $\mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{e}_n$

$$\mathrm{h}_m(x) = \sum_{j=1}^{\min\{m,n\}} (-1)^{j-1}\, \mathrm{e}_j(x)\, \mathrm{h}_{m-j}(x) \qquad (m \geq 1).$$

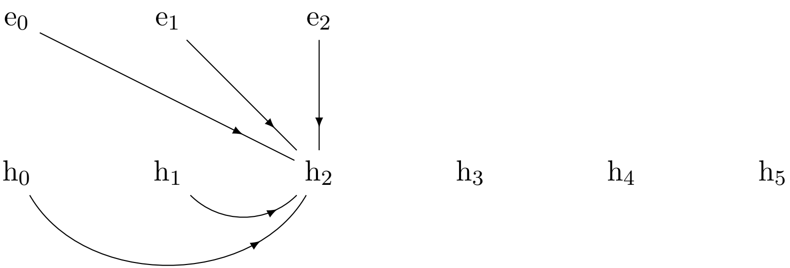
Esquema para $n = 2$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{e}_0 \arrow[dr] & \mathrm{e}_1 \arrow[d] & \mathrm{e}_2 & & & \\
\mathrm{h}_0 \arrow[r, bend right] & \mathrm{h}_1 & \mathrm{h}_2 & \mathrm{h}_3 & \mathrm{h}_4 & \mathrm{h}_5
\end{tikzcd}$$

Esquema de cálculo de $h_0, h_1, h_2, \ldots$ en términos de $e_0, \ldots, e_n$

$$h_m(x) = \sum_{j=1}^{\min\{m,n\}} (-1)^{j-1}\, e_j(x)\, h_{m-j}(x) \qquad (m \geq 1).$$

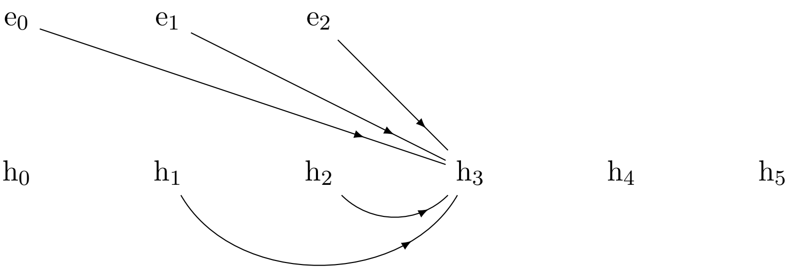
Esquema para $n = 2$:



Esquema de cálculo de $\mathrm{h}_0, \mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2, \ldots$ en términos de $\mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{e}_n$

$$\mathrm{h}_m(x) = \sum_{j=1}^{\min\{m,n\}} (-1)^{j-1}\, \mathrm{e}_j(x)\, \mathrm{h}_{m-j}(x) \qquad (m \geq 1).$$

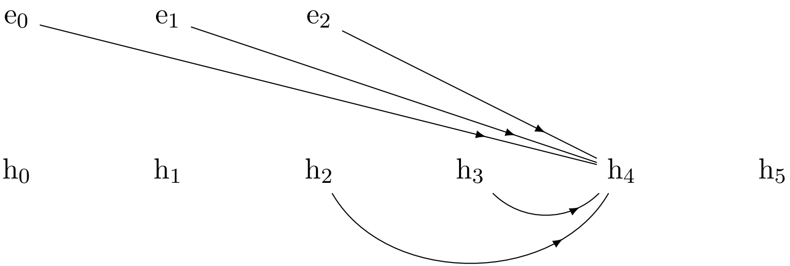
Esquema para $n = 2$:



Esquema de cálculo de $h_0, h_1, h_2, \ldots$ en términos de $e_0, \ldots, e_n$

$$h_m(x) = \sum_{j=1}^{\min\{m,n\}} (-1)^{j-1}\, e_j(x)\, h_{m-j}(x) \qquad (m \geq 1).$$

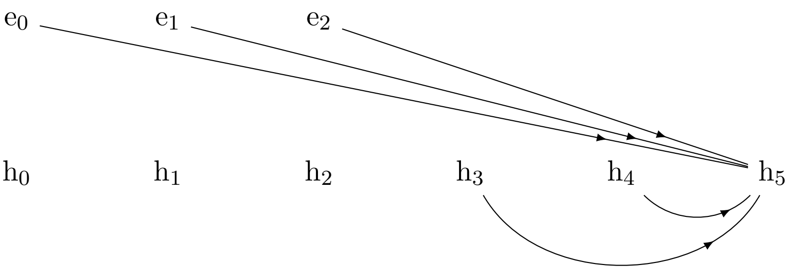
Esquema para $n = 2$:



Esquema de cálculo de $h_0, h_1, h_2, \ldots$ en términos de $e_0, \ldots, e_n$

$$h_m(x) = \sum_{j=1}^{\min\{m,n\}} (-1)^{j-1} e_j(x)\, h_{m-j}(x) \qquad (m \ge 1).$$

Esquema para $n = 2$:



Algoritmo: expresión de $\mathrm{h}_0, \mathrm{h}_1, \ldots, \mathrm{h}_p$ en términos de $\mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{e}_n$

$$\mathrm{h}_m(x) = \sum_{j=1}^{\min\{m,n\}} (-1)^{j-1}\, \mathrm{e}_j(x)\, \mathrm{h}_{m-j}(x) \qquad (m \geq 1).$$

```python
def h_via_e(elist, p):
    n = len(elist) - 1
    hlist = [0] * (p + 1)
    hlist[0] = 1
    for m in range(1, p + 1):
        for j in range(1, min(m, n) + 1):
            hlist[m] += ((-1) ** (j - 1)) * elist[j] * hlist[m - j]
    return hlist
```

Al revés, $\mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{e}_n$ se expresan en términos de $\mathrm{h}_0, \ldots, \mathrm{h}_n$

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \, \mathrm{e}_j(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{h}_{m-j}(x_1, \ldots, x_n) = \delta_{m,0}.$$

Al revés, $\mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{e}_n$ se expresan en términos de $\mathrm{h}_0, \ldots, \mathrm{h}_n$

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \, \mathrm{e}_j(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{h}_{m-j}(x_1, \ldots, x_n) = \delta_{m,0}.$$

$$\mathrm{e}_0(x) = 1,$$

Al revés, $\mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{e}_n$ se expresan en términos de $\mathrm{h}_0, \ldots, \mathrm{h}_n$

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \, \mathrm{e}_j(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{h}_{m-j}(x_1, \ldots, x_n) = \delta_{m,0}.$$

$$\mathrm{e}_0(x) = 1,$$

$$\mathrm{e}_m(x) = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{m-1-j} \, \mathrm{e}_j(x) \, \mathrm{h}_{m-j}(x) \qquad (1 \le m \le n).$$

Al revés, $\mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{e}_n$ se expresan en términos de $\mathrm{h}_0, \ldots, \mathrm{h}_n$

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \, \mathrm{e}_j(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{h}_{m-j}(x_1, \ldots, x_n) = \delta_{m,0}.$$

$$\mathrm{e}_0(x) = 1,$$

$$\mathrm{e}_m(x) = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{m-1-j} \, \mathrm{e}_j(x) \, \mathrm{h}_{m-j}(x) \qquad (1 \le m \le n).$$

Para $m > n$, no hay necesidad de aplicar esta fórmula, porque $\mathrm{e}_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Conclusiones

- Para cada r, las siguientes matrices triangulares son mutualmente inversas:

$$\left[(-1)^{j-k}\,\mathrm{e}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r}, \qquad \left[\mathrm{h}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r},$$

Conclusiones

- Para cada r, las siguientes matrices triangulares son mutualmente inversas:

$$\left[(-1)^{j-k}\,\mathrm{e}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r}, \qquad \left[\mathrm{h}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r},$$

Luego estudiaremos sus menores usando el teorema de Jacobi.

Conclusiones

- Para cada r, las siguientes matrices triangulares son mutualmente inversas:

$$\left[(-1)^{j-k}\,\mathrm{e}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r}, \qquad \left[\mathrm{h}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r},$$

  Luego estudiaremos sus menores usando el teorema de Jacobi.

- Los polinomios $\mathrm{h}_k(x_1, \ldots, x_n)$, $k \geq 0$,
  se calculan a partir de $\mathrm{e}_j(x_1, \ldots, x_n)$, $0 \leq j \leq n$,
  sin necesidad de calcular $x_1, \ldots, x_n$.

Conclusiones

- Para cada r, las siguientes matrices triangulares son mutualmente inversas:

$$\left[(-1)^{j-k}\,\mathrm{e}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r}, \qquad \left[\mathrm{h}_{j-k}(x)\right]_{j,k=1}^{r},$$

  Luego estudiaremos sus menores usando el teorema de Jacobi.

- Los polinomios $\mathrm{h}_k(x_1,\ldots,x_n)$, $k \geq 0$,
  se calculan a partir de $\mathrm{e}_j(x_1,\ldots,x_n)$, $0 \leq j \leq n$,
  sin necesidad de calcular $x_1,\ldots,x_n$.

- Los polinomios $\mathrm{e}_j(x_1,\ldots,x_n)$, $0 \leq j \leq n$,
  se calculan a partir de $\mathrm{h}_k(x_1,\ldots,x_n)$, $0 \leq k \leq n$,
  sin necesidad de calcular $x_1,\ldots,x_n$.