Teorema del binomio y su demostración por inducción matemática

Objetivos. Demostrar el teorema del binomio usando la inducción matemática y la fórmula recursiva para los coeficientes binomiales.

Requisitos. Coeficientes binomiales y sus propiedades, demostraciones por inducción matemática, notación $\sum$ para sumas, cambio de variable en una suma.

1. Sugerencia. En estos apuntes se explica solamente la demostración formal algebraica del teorema del binomio. Para entender mejor el tema, se recomienda estudiar el sentido combinatorio de los coeficientes binomiales y la demostración combinatoria del teorema binomial.

Coeficientes binomiales (repaso)

La función factorial y los coeficientes binomiales se deben estudiar muy bien antes de atacar la demostración del teorema del binomio. En este texto repasamos solamente las fórmulas necesarias con velocidad de luz.

2. Definición de coeficientes binomiales a través de factoriales (repaso). Para cualquier $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ y cualquier $k \in \{0, \ldots, n\}$ se pone

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Los números $\binom{n}{k}$ se llaman *coeficientes binomiales* debido al papel que hacen en el Teorema 12. El número $\binom{n}{k}$ se puede pronunciar como "el coeficiente binomial k de n" o simplemente "k de n", debido a su sentido combinatorio.

3. Condiciones de frontera para los coeficientes binomiales (repaso). Para cualquier $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$,

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{n} = 1. \tag{1}$$

4. Fórmula recursiva para los coeficientes binomiales (repaso). Para cualquier $n \in \{0, 1, \ldots\}$ y cualquier $k \in \{0, \ldots, n\}$,

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}. \tag{2}$$

5. Los primeros renglones del triángulo de Pascal (repaso muy rápido). La fórmula recursiva (2) y las condiciones de frontera (1) permiten calcular los coeficientes binomiales de manera recursiva. Primero se calcula $\binom{0}{0}$, luego $\binom{1}{k}$ con $k = 0, 1$, luego $\binom{2}{k}$ con $k = 0, 1, 2$, etc. Los resultados se escriben como una tabla triangular:

$$
\begin{array}{lccccccc}
n = 0 & & & & 1 & & & \\
n = 1 & & & 1 & & 1 & & \\
n = 2 & & 1 & & 2 & & 1 & \\
n = 3 & 1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}
$$

6. Potencias del binomio, $n = 0, 1, 2$. Cálculos directos muestran que

$$(a + b)^0 = 1 = 1a^0 b^0, \tag{3}$$

$$(a + b)^1 = a + b = 1a^1 b^0 + 1a^0 b^1, \tag{4}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1a^2 b^0 + 2a^1 b^1 + 1a^0 b^2. \tag{5}$$

Observamos que en cada uno de estos casos particulares $(a + b)^n$ se expande en una suma de $n + 1$ sumandos; cada sumando es de la forma $Ca^j b^k$, donde $j + k = n$; los coeficientes C son elementos de los primeros renglones del triángulo de Pascal. La potencia j se puede escribir como $n - k$. Podemos generalizar estas observaciones y conjeturar que siempre se cumple la siguiente fórmula:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Es el teorema del binomio. Vamos a demostrarlo por inducción matemática.

7. Definición recursiva de las potencias naturales de un número (repaso). Para cualquier número x real (o complejo),

$$x^0 = 1, \qquad x^{n+1} = x^n \cdot x.$$

8. El paso de $n = 2$ a $n = 3$. Calculemos $(a + b)^3$ usando la definición recursiva de las potencias y la fórmula (5):

$$
\begin{aligned}
(a + b)^3 &= (a + b)^2 (a + b) = (1a^2 b^0 + 2a^1 b^1 + 1a^0 b^2)(a + b) \\
&= (1a^3 b^0 + 2a^2 b^1 + 1a^1 b^2) + (1a^2 b^1 + 2a^1 b^2 + 1a^0 b^3) \\
&= 1a^3 b^0 + (2 + 1)a^2 b^1 + (1 + 2)a^1 b^2 + 1a^0 b^3 \\
&= 1a^3 b^0 + 3a^2 b^1 + 3a^1 b^2 + 1a^0 b^3.
\end{aligned}
$$

Comparando con el renglón $n = 3$ del triángulo de Pascal concluimos que

$$(a + b)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^{3-k} b^k. \tag{6}$$

9. Pasamos de $n = 3$ a $n = 4$. Este razonamiento es crucial para entender la demostración general. Calculemos $(a+b)^4$ usando la definición recursiva de las potencias y la fórmula (6). Ahora escribimos los coeficientes binomiales de manera simbólica, sin sustituir los valores numéricos:

$$\begin{aligned}
(a+b)^4 &\overset{(1)}{=} (a+b)^3(a+b) \\
&\overset{(2)}{=} \left(\binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}a^0b^3 \right)(a+b) \\
&\overset{(3)}{=} \left(\binom{3}{0}a^4b^0 + \binom{3}{1}a^3b^1 + \binom{3}{2}a^2b^2 + \binom{3}{3}a^1b^3 \right) \\
&\quad + \left(\binom{3}{0}a^3b^1 + \binom{3}{1}a^2b^2 + \binom{3}{2}a^1b^3 + \binom{3}{3}a^0b^4 \right) \\
&\overset{(4)}{=} \binom{3}{0}a^4b^0 + \left(\binom{3}{1}a^3b^1 + \binom{3}{2}a^2b^2 + \binom{3}{3}a^1b^3 \right) \\
&\quad + \left(\binom{3}{0}a^3b^1 + \binom{3}{1}a^2b^2 + \binom{3}{2}a^1b^3 \right) + \binom{3}{3}a^0b^4. \\
&\overset{(5)}{=} \binom{3}{0}a^4b^0 + \left(\binom{3}{1} + \binom{3}{0} \right) a^3b^1 + \left(\binom{3}{2} + \binom{3}{1} \right) a^2b^2 \\
&\quad + \left(\binom{3}{3} + \binom{3}{2} \right) a^1b^3 + \binom{3}{0}a^0b^4 \\
&\overset{(6)}{=} \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4.
\end{aligned}$$

Justificación de los pasos:

(1) Se usa la definición recursiva de las potencias.

(2) Se aplica la fórmula (6).

(3) Multiplicamos los paréntesis usando la propiedad distributiva y otras propiedades de operaciones algebraicas con números, también se utiliza la definición recursiva de las potencias (por ejemplo, $a^2a = a^3$).

(4) Separamos los sumandos "extremos": el sumando con a^4b^0 y el sumando con a^0b^4.

(5) Agrupamos los sumandos intermedios juntando las potencias iguales.

(6) Aplicamos las fórmulas (2) y (1):

$$\binom{3}{0} = 1 = \binom{4}{0}, \qquad \binom{3}{3} = 1 = \binom{4}{4}, \qquad \binom{3}{k} + \binom{3}{k+1} = \binom{4}{k+1}.$$

10. Ejercicio. Demostrar la fórmula para $(a+b)^5$ usando la fórmula para $(a+b)^4$ que acabamos de demostrar.

11. Cambio de variable de sumatoria (repaso). Necesitamos repasar un truco más. En la suma

$$\sum_{p=5}^{9} a_p$$

hagamos el cambio de variable $q = p - 3$. Como p corre de 5 a 9, la nueva variable q corre de 2 a 6, y p se expresa a través de q como $p = q + 3$. Entonces

$$\sum_{p=5}^{9} a_p = \sum_{q=2}^{6} a_{q+3}.$$

12. Teorema del binomio. Sean a, b algunos números reales. Entonces para cada $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ se cumple la fórmula

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{7}$$

13. Observación. La fórmula es válida también para números complejos, para polinomios, y en general, para dos elementos a, b de un anillo asociativo, tales que $ab = ba$.

Demostración. Notemos que a y b son fijos. Para cada $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ denotemos por $R(n)$ al lado derecho de la fórmula (7). Vamos a demostrar por inducción sobre n que para cualquier n en $\{0, 1, 2, \ldots\}$ se cumple la fórmula $(a+b)^n = R(n)$.

Verifiquemos la base de inducción, esto es, demostremos la fórmula $(a+b)^0 = R(0)$:

$$(a+b)^0 = 1 = 1a^0b^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = R(0).$$

Paso de inducción. Suponiendo que $(a+b)^n = R(n)$ demostremos $(a+b)^{n+1} = R(n+1)$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &\overset{(1)}{=} (a+b)^n (a+b) \\
&\overset{(2)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) (a+b) \\
&\overset{(3)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) a + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) b \\
&\overset{(4)}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&\overset{(5)}{=} \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1}.
\end{aligned}$$

Consideremos por separado la última suma. Hagamos el cambio de variable $j = k + 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^{n-j+1} b^{j},$$

luego redenotamos j por k:

$$\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^{n-j+1} b^{j} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^{k}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &\overset{(6)}{=} \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} \\
&\overset{(7)}{=} \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} \\
&\overset{(8)}{=} \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 \\
&\overset{(9)}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k = R(n+1).
\end{aligned}$$

Justificación:

(1) Definición recursiva de las potencias naturales de números reales.

(2) La hipótesis de inducción, esto es, la fórmula $(a+b)^n = R(n)$.

(3) La propiedad distributiva.

(4) La propiedad distributiva, la propiedad conmutativa de multiplicación (para escribir $a^{n-k} b^k a$ como $a^{n-k} a b^k$) y la definición recursiva de las potencias naturales.

(5) En la primera suma separamos el sumando que corresponde a $k = 0$, en la segunda suma separamos el sumando que corresponde a $k = n$.

(6) Cambio de variable en la segunda suma.

(7) Reagrupación (usando propiedades algebraicas de números reales).

(8) Propiedades (2) y (1) de los coeficientes binomiales:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}, \quad \binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}, \quad \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}.$$

(9) Observamos que los sumandos extremos se pueden escribir como $\binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$, con $k = 0$ y $k = n + 1$. $\square$