Coeficientes binomiales

(Ejercicios)

Objetivos. Definir coeficientes binomiales y estudiar sus propiedades principales. Conocer su aplicación en la fórmula para las potencias del binomio y su sentido combinatorio (sin demostración).

Requisitos. Factorial y sus propiedades elementales. Expresión de productos de números naturales consecutivos a través de factoriales.

1. Definición del factorial de un número entero positivo (repaso). El factorial de un número $n \in \mathbb{N}$, denotado por $n!$, se define como el producto de los números enteros consecutivos de $\underbrace{\qquad}_{?}$ a $\underbrace{\qquad}_{?}$. Por ejemplo,

$$4! = \underbrace{\qquad}_{?} \cdot \underbrace{\qquad}_{?} \cdot \underbrace{\qquad}_{?} \cdot \underbrace{\qquad}_{?} = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

2. Fórmula recursiva para el factorial (repaso). Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)! = (n+1) \cdot \underbrace{\qquad}_{?} \tag{1}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$,

$$n! = n \cdot \underbrace{\qquad}_{?}.$$

3. Definición del factorial del número 0 (repaso). Por definición,

$$0! = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Notamos que con esta definición la fórmula (1) se cumple también para $n = 0$.

En efecto, el lado izquierdo de esta fórmula para $n = 0$ es $(0+1)! = 1! = \underbrace{\qquad}_{?}$,

y el lado derecho es $(0+1) \cdot 0! = 1 \cdot 1 = \underbrace{\qquad}_{?}$.

4. Definición recursiva de la función factorial (repaso). La función factorial se puede definir por inducción matemática, por medio de la condición inicial

$$0! = \underbrace{\qquad}_{?}$$

y de la fórmula recursiva

$$(n+1)! = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

5. Definición de coeficientes binomiales.
Para cualquier $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ y cualquier $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$,

$$\binom{n}{k} \coloneqq \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Calcule:

6. $\displaystyle \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{120}{2 \cdot 6} =$

7. $\displaystyle \binom{6}{3} =$

8. $\displaystyle \binom{n}{0} =$

9. $\displaystyle \binom{n}{1} =$

10. $\displaystyle \binom{n}{2} =$

11. $\displaystyle \binom{n}{n} =$

12. $\displaystyle \binom{n}{n-1} =$

13. $\displaystyle \binom{n}{n-2} =$

14. Propiedad simétrica de coeficientes binomiales, ejemplo.
De los cálculos $\displaystyle \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!}$, $\displaystyle \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!}$, se ve que $\displaystyle \binom{5}{2} = \binom{5}{3}$.

15. Propiedad simétrica de coeficientes binomiales.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Demostración. $\displaystyle\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(\qquad)!\,\big(n-(\qquad)\big)!} =$ $\square$

16. Fórmula recursiva para los coeficientes binomiales, ejemplo.

$$\binom{8}{2} + \binom{8}{3} = \frac{\qquad}{2!\,6!} + \frac{\qquad}{3!\,5!} = \frac{\qquad\cdot 3}{3!\,6!} + \frac{\qquad\cdot 6}{3!\,6!}$$

$$= \frac{\qquad(\qquad+\qquad)}{3!\,6!} = \frac{\qquad\cdot\qquad}{3!\,6!} = \frac{\qquad!}{3!\,6!} = \binom{\qquad}{3}.$$

17. Fórmula recursiva para los coeficientes binomiales.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Demostración. Por un lado, $\displaystyle\binom{n+1}{k+1} = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\qquad}{\qquad}$. Por otro lado,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{\qquad}{\qquad} + \frac{\qquad}{\qquad}$$

$$= \frac{\qquad}{(k+1)!\,(n-k)!} + \frac{\qquad}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

$$=$$ $\square$

18. Otra forma de la fórmula recursiva para los coeficientes binomiales.
Use la fórmula del ejercicio anterior para expresar $\binom{n}{k}$ a través de ciertos valores de $\binom{n-1}{?}$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{\qquad} + \binom{n-1}{\qquad}.$$

19. Calcule

$$\binom{5}{2}, \qquad \binom{5}{3} \qquad \text{y} \qquad \binom{6}{3}.$$

Verifique que

$$\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}.$$

Triángulo de Pascal

20. Descripción de la idea. Usando las fórmulas

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \qquad \binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{n} = 1,$$

uno puede calcular los coeficientes binomiales sucesivamente:

calcular $\binom{2}{1}$ usando $\binom{1}{0}$ y $\binom{1}{1}$,

calcular $\binom{3}{1}$ y $\binom{3}{2}$ usando $\binom{2}{0}, \binom{2}{1}, \binom{2}{2}$, etc.

21. Los primeros renglones del triángulo de Pascal.
Recordando que $\binom{n}{0} = 1$ y $\binom{n}{n} = 1$ obtenemos los renglones $n = 0$ y $n = 1$:

$$\binom{0}{0} = \underbrace{\qquad}_{?},$$

$$\binom{1}{0} = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \binom{1}{1} = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

En el siguiente renglón usamos las fórmulas $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ y la fórmula recursiva:

$$\binom{2}{0} = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \binom{2}{2} = \underbrace{\qquad}_{?}$$

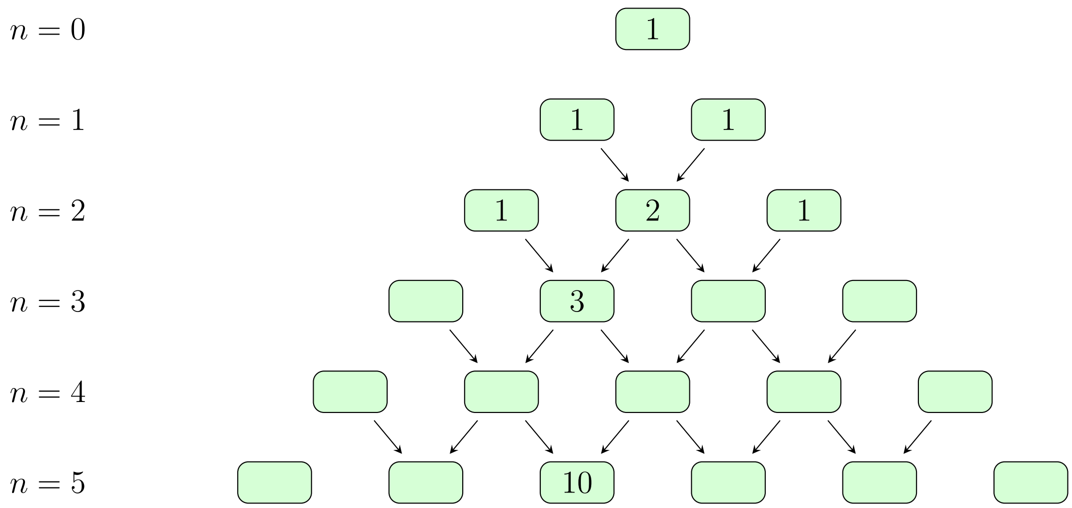
Cálculos para $n = 3$:

$$\binom{3}{0} = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \binom{3}{1} = \binom{2}{0} + \binom{2}{1} = \underbrace{\qquad}_{?},$$

$$\binom{3}{2} = \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \binom{3}{3} = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

De manera similara calcule $\binom{4}{k}$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4$:

22. El triángulo de Pascal. Los renglones corresponden a $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Para cada n, el n-ésimo renglón está formado por los números $\binom{n}{k}$ con $k = 0, 1, \ldots, n$. Las flechas muestran cómo funciona la fórmula recursiva: cada elemento (excepto los elementos extremos en cada renglón) se obtiene como la suma de dos elementos de arriba.



Con ayuda del triángulo de Pascal encontramos, por ejemplo,

$$\binom{4}{2} = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad\qquad \binom{5}{3} = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Potencias del binomio (sin demostración)

23. Recordamos que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Notamos que los coeficientes 1, 2, 1 de esta fórmula coinciden con las entradas del renglón $n = 2$ del triángulo de Pascal:

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2.$$

De manera similar (sin demostración),

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3 = a^3 + \underbrace{\qquad}_{?} a^2 b + \underbrace{\qquad}_{?} ab^2 + b^3.$$

De manera similar escriba la fórmula para $(a+b)^4$:

El sentido combinatorio de los coeficientes binomiales (sin demostración)

24. Consideremos un conjunto de 5 elementos. Por simplicidad de notación suponemos que sus elementos son $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Encontremos todos los subconjuntos de tamaño 2:

$$\{1,2\}, \quad \{1,3\}, \quad \{1,4\}, \quad \{1,5\}, \quad \{2,3\}, \quad \{2,4\}, \quad \{2,5\}, \quad \{3,4\}, \quad \{3,5\}, \quad \{4,5\}.$$

Son 10 subconjuntos de tamaño 2. Por otro lado, $\displaystyle\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \underbrace{\qquad}_{?}.$

25. En el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ encuentre todos los subconjuntos de tamaño 3:

$$\{1,2,3\}, \quad \{1,2,4\}, \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{?}, \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Son $\underbrace{\quad}_{?}$ subconjuntos. Por otro lado, $\displaystyle\binom{4}{3} =$

26. El sentido combinatorio de los coeficientes binomiales. Basándose en los ejemplos anteriores, enunciamos el resultado general sin demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Entonces en cualquier conjunto de n elementos hay exactamente $\binom{n}{k}$ subconjuntos de $\underbrace{\quad}_{?}$ elementos.

27. ¿Cuántos subconjuntos de 3 elementos tiene un conjunto de 5 elementos? Calcule la respuesta con un coeficiente binomial, luego escriba todos estos subconjuntos.

28. ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos tiene un conjunto de 6 elementos?