Particiones enteras y sus diagramas

Mario Alberto Moctezuma Salazar
Coautor: Egor Maximenko

ESFM - IPN

Seminario Matrices y Operadores
11 de noviembre de 2020

Particiones

Una *partición* es cualquier tupla $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de enteros tal que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 1.$$

λ_j se llaman *partes* de λ.

El número de partes es la *longitud* de λ, denotada por $\ell(\lambda)$.

La suma de las partes es el *peso* de λ, denotado por $|\lambda|$:

$$|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

Ejemplo

$\lambda = (\underbrace{5}_{\lambda_1}, \underbrace{2}_{\lambda_2}, \underbrace{2}_{\lambda_3}, \underbrace{1}_{\lambda_4})$. Su longitud es $\ell(\lambda) = 4$ y su peso es

$$|\lambda| = 5 + 2 + 2 + 1 = 10.$$

Las particiones se pueden pensar como sucesiones decrecientes finitas.

$$\lambda = (5, 2, 2, 1, 0, 0, \ldots).$$

La longitud en este caso se define como

$$\ell(\lambda) = \#\{\lambda_j \colon \lambda_j \neq 0\} = \max(j \colon \lambda_j \neq 0).$$

Denotemos por $\mathcal{P}$ al conjunto de todas las particiones.

$$\mathcal{P}_n \coloneqq \{\lambda \in \mathcal{P} \colon \ell(\lambda) \leq n\}.$$

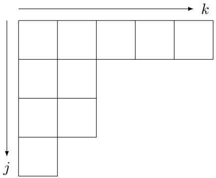
El diagrama de Young–Ferrer asociado a la partición λ es

$$D(\lambda) \coloneqq \{(j,k) \in \mathbb{N}^2 \colon 1 \le k \le \lambda_j\}.$$

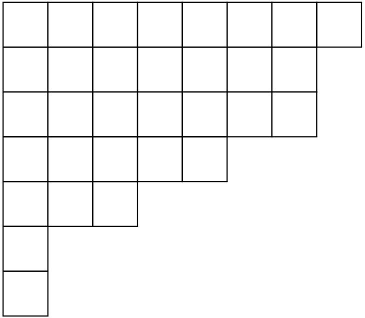
Por ejemplo,

$$D\big((5,2,2,1)\big) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1)\}.$$

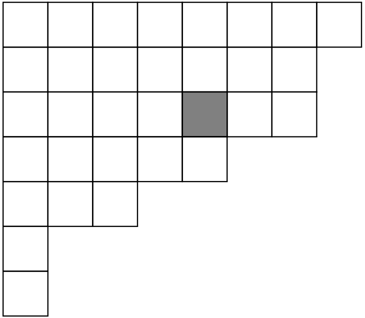
$D\big((5,2,2,1)\big) =$



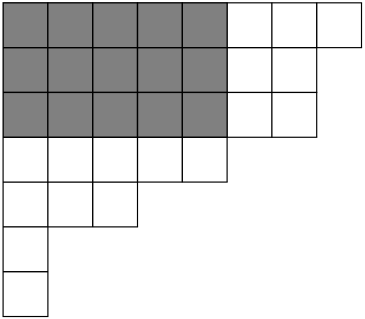
Propiedad de diagramas



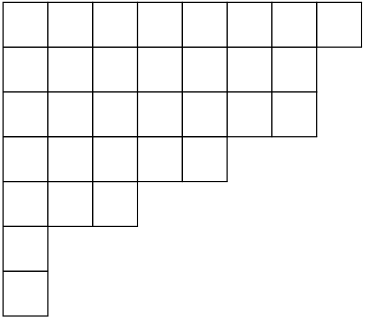
Propiedad de diagramas



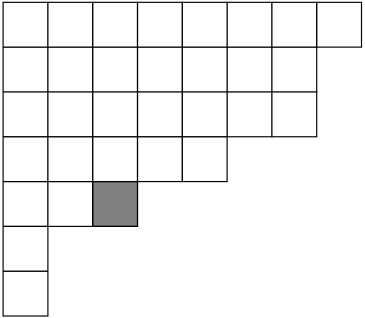
Propiedad de diagramas



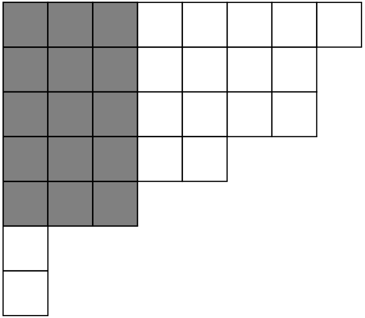
Propiedad de diagramas



Propiedad de diagramas



Propiedad de diagramas



Propiedad de diagramas

Definición

Definimos el conjunto:

$$\mathcal{Y} := \{A \subset \mathbb{N}^2 \colon A \text{ es finito } \ \forall\, a \in A \ \ \forall\, b \leq a,\, b \in A\}.$$

Ejemplos que no pertenecen a $\mathcal{Y}$

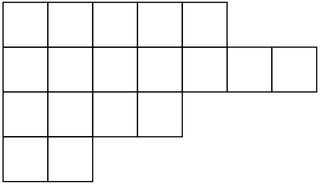
Propiedad de diagramas

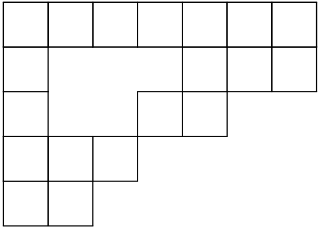
Definición

Definimos el conjunto:

$$\mathcal{Y} := \{A \subset \mathbb{N}^2 \colon A \text{ es finito } \ \forall\, a \in A \ \ \forall\, b \leq a,\, b \in A\}.$$

Ejemplos que no pertenecen a $\mathcal{Y}$





Proposición (Sobre diagramas asociados a particiones)

Sea $\lambda \in \mathcal{P}$, entonces $D(\lambda) \in \mathcal{Y}$.

Sean $(j, k) \in D(\lambda)$ y $(r, s) \in \mathbb{N}^2$ tal que $(r, s) \leq (j, k)$, de la definición tenemos $k \leq \lambda_j$. Como $r \leq j$, al ser λ diagrama tenemos que $\lambda_r \geq \lambda_j$ y

$$s \leq k \leq \lambda_j \leq \lambda_r,$$

por lo que $(s, r) \in D(\lambda)$.

Proposición (Receta para recuperar una partición a partir de su diagrama)

Dada λ una partición y $A \coloneqq D(\lambda)$ su diagrama, entonces

$$\lambda_j = \#\{k\colon (j,k) \in A\}.$$

Demostración

$$\#\{k\colon (j,k) \in A\} = \#\{k\colon k \le \lambda_j\} = \#\{1,\ldots\lambda_j\} = \lambda_j.$$

Corolario (Sobre la inyectividad)

Sean $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$. Si $D(\lambda) = D(\mu)$, entonces $\lambda = \mu$.

Para todo $\lambda \in \mathbb{N}$:

$$\lambda_j = \#\{k \colon (j, k) \in D(\lambda)\} = \#\{k \colon (j, k) \in D(\mu)\} = \mu_j.$$

Consideremos, por ejemplo,

$$D\big((5,2,2,1)\big) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$

Consideremos, por ejemplo,

$$D((5,2,2,1)) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$

- $\lambda_1 = \#\{k : (1,k) \in D(\lambda)\}$

Consideremos, por ejemplo,

$$D\big((5,2,2,1)\big) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$

- $\lambda_1 = \#\{k : (1,k) \in D(\lambda)\} = \#\{1,2,3,4,5\} = 5,$

Consideremos, por ejemplo,

$$D\big((5,2,2,1)\big) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$

- $\lambda_1 = \#\{k : (1,k) \in D(\lambda)\} = \#\{1,2,3,4,5\} = 5,$
- $\lambda_2 = \#\{k : (2,k) \in D(\lambda)\}$

Consideremos, por ejemplo,

$$D\big((5,2,2,1)\big) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$

- $\lambda_1 = \#\{k : (1,k) \in D(\lambda)\} = \#\{1,2,3,4,5\} = 5,$
- $\lambda_2 = \#\{k : (2,k) \in D(\lambda)\} = \#\{1,2\} = 2,$

Consideremos, por ejemplo,

$$D\big((5,2,2,1)\big) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$

- $\lambda_1 = \#\{k : (1,k) \in D(\lambda)\} = \#\{1,2,3,4,5\} = 5,$
- $\lambda_2 = \#\{k : (2,k) \in D(\lambda)\} = \#\{1,2\} = 2,$
- $\lambda_3 = \#\{k : (3,k) \in D(\lambda)\}$

Consideremos, por ejemplo,

$$D\big((5,2,2,1)\big) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$

- $\lambda_1 = \#\{k : (1,k) \in D(\lambda)\} = \#\{1,2,3,4,5\} = 5,$
- $\lambda_2 = \#\{k : (2,k) \in D(\lambda)\} = \#\{1,2\} = 2,$
- $\lambda_3 = \#\{k : (3,k) \in D(\lambda)\} = \#\{1,2\} = 2,$

Consideremos, por ejemplo,

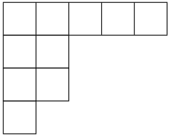
$$D\big((5,2,2,1)\big) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$

- $\lambda_1 = \#\{k : (1,k) \in D(\lambda)\} = \#\{1,2,3,4,5\} = 5,$
- $\lambda_2 = \#\{k : (2,k) \in D(\lambda)\} = \#\{1,2\} = 2,$
- $\lambda_3 = \#\{k : (3,k) \in D(\lambda)\} = \#\{1,2\} = 2,$
- $\lambda_4 = \#\{k : (4,k) \in D(\lambda)\}$

Consideremos, por ejemplo,

$$D\big((5,2,2,1)\big) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$

- $\lambda_1 = \#\{k : (1,k) \in D(\lambda)\} = \#\{1,2,3,4,5\} = 5,$
- $\lambda_2 = \#\{k : (2,k) \in D(\lambda)\} = \#\{1,2\} = 2,$
- $\lambda_3 = \#\{k : (3,k) \in D(\lambda)\} = \#\{1,2\} = 2,$
- $\lambda_4 = \#\{k : (4,k) \in D(\lambda)\} = \#\{1\} = 1.$



Sobre la estructura de los renglones de los diagramas

Dado $A \in \mathcal{Y}$, definamos para cada $j \in \mathbb{N}$

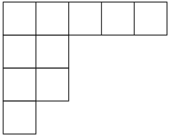
$$R_{A,j} := \{k : (j, k) \in A\}.$$

Sobre la estructura de los renglones de los diagramas

Dado $A \in \mathcal{Y}$, definamos para cada $j \in \mathbb{N}$

$$R_{A,j} \coloneqq \{k : (j,k) \in A\}.$$

$$A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$

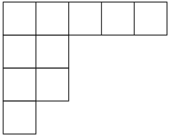


Sobre la estructura de los renglones de los diagramas

Dado $A \in \mathcal{Y}$, definamos para cada $j \in \mathbb{N}$

$$R_{A,j} \coloneqq \{k : (j,k) \in A\}.$$

$$A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$



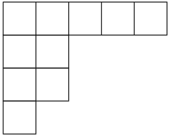
- $R_{A,1} = \{k : (1,k) \in A\}$

Sobre la estructura de los renglones de los diagramas

Dado $A \in \mathcal{Y}$, definamos para cada $j \in \mathbb{N}$

$$R_{A,j} := \{k : (j,k) \in A\}.$$

$$A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$



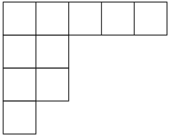
- $R_{A,1} = \{k : (1,k) \in A\} = \{1,2,3,4,5\}$,

Sobre la estructura de los renglones de los diagramas

Dado $A \in \mathcal{Y}$, definamos para cada $j \in \mathbb{N}$

$$R_{A,j} \coloneqq \{k : (j,k) \in A\}.$$

$$A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$



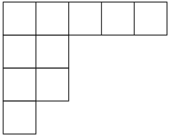
- $R_{A,1} = \{k : (1,k) \in A\} = \{1,2,3,4,5\}$,
- $R_{A,2} = \{k : (2,k) \in A\}$

Sobre la estructura de los renglones de los diagramas

Dado $A \in \mathcal{Y}$, definamos para cada $j \in \mathbb{N}$

$$R_{A,j} \coloneqq \{k : (j,k) \in A\}.$$

$$A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$



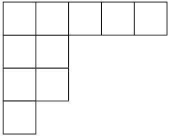
- $R_{A,1} = \{k : (1,k) \in A\} = \{1,2,3,4,5\}$,
- $R_{A,2} = \{k : (2,k) \in A\} = \{1,2\}$,

Sobre la estructura de los renglones de los diagramas

Dado $A \in \mathcal{Y}$, definamos para cada $j \in \mathbb{N}$

$$R_{A,j} \coloneqq \{k : (j,k) \in A\}.$$

$$A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$



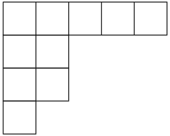
- $R_{A,1} = \{k : (1,k) \in A\} = \{1,2,3,4,5\}$,
- $R_{A,2} = \{k : (2,k) \in A\} = \{1,2\}$,
- $R_{A,3} = \{k : (3,k) \in A\}$

Sobre la estructura de los renglones de los diagramas

Dado $A \in \mathcal{Y}$, definamos para cada $j \in \mathbb{N}$

$$R_{A,j} \coloneqq \{k : (j,k) \in A\}.$$

$$A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$



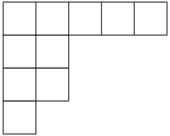
- $R_{A,1} = \{k : (1,k) \in A\} = \{1,2,3,4,5\}$,
- $R_{A,2} = \{k : (2,k) \in A\} = \{1,2\}$,
- $R_{A,3} = \{k : (3,k) \in A\} = \{1,2\}$,

Sobre la estructura de los renglones de los diagramas

Dado $A \in \mathcal{Y}$, definamos para cada $j \in \mathbb{N}$

$$R_{A,j} := \{k : (j,k) \in A\}.$$

$$A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$



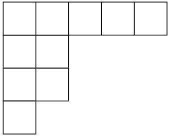
- $R_{A,1} = \{k : (1,k) \in A\} = \{1,2,3,4,5\}$,
- $R_{A,2} = \{k : (2,k) \in A\} = \{1,2\}$,
- $R_{A,3} = \{k : (3,k) \in A\} = \{1,2\}$,
- $R_{A,4} = \{k : (4,k) \in A\}$

Sobre la estructura de los renglones de los diagramas

Dado $A \in \mathcal{Y}$, definamos para cada $j \in \mathbb{N}$

$$R_{A,j} \coloneqq \{k : (j,k) \in A\}.$$

$$A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$



- $R_{A,1} = \{k : (1,k) \in A\} = \{1,2,3,4,5\}$,
- $R_{A,2} = \{k : (2,k) \in A\} = \{1,2\}$,
- $R_{A,3} = \{k : (3,k) \in A\} = \{1,2\}$,
- $R_{A,4} = \{k : (4,k) \in A\} = \{1\}$.

Sobre la estructura de los renglones de los diagramas

Lema

Si $A \in \mathcal{Y}$, entonces para cada $j \in \mathbb{N}$

$$R_{A,j} = \{1, \ldots, \max(R_{A,j})\}$$

y

$$R_{A,j} = \{1, \ldots, \#R_{A,j}\}$$

Demostración: Sean $(j, k) \in A$ y $s \leq k$, entonces $(j, s) \leq (j, k)$ por lo que $(j, s) \in A$.

Proposición (La correspondencia entre particiones y diagramas es sobre)

Sean $A \in \mathcal{Y}$. Definimos λ por:

$$\lambda_j = \#\{k : (j,k) \in A\}.$$

Entonces $\lambda \in \mathcal{P}$ y $A = D(\lambda)$.

Gracias al lema anterior $\lambda_j = \max(R_{A,j})$.

Demostración: Para cada $j \in \mathbb{N}$, $(j+1, \lambda_{j+1}) \in A$, como $A \in \mathcal{Y}$,

$$(j, \lambda_{j+1}) \in A,$$

esto es

$$\lambda_{j+1} \in R_{A,j}.$$

Se tiene entonces

$$\lambda_{j+1} \leq \max(R_{A,j}) = \#R_{A,j} = \lambda_j.$$

La condición que $A \in \mathcal{Y}$ A es finito, implica que λ es una sucesión finita.

Restringimos el contra dominio de D a $\mathcal{Y}$.

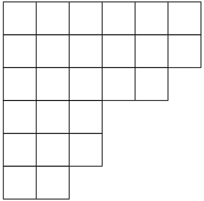
Proposición

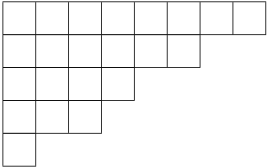
La función

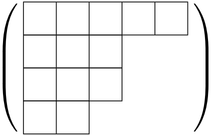
$$D : \mathcal{P} \to \mathcal{Y}$$

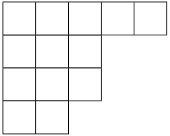
es biyectiva.

$$D^{-1}(A)_j = \#\{k : (j,k) \in A\}.$$

$D\big((6,6,5,3,3,2)\big) =$ 

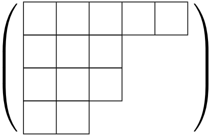
$D\big((8,6,4,3,1)\big) =$ 

D^{-1} 

$D^{-1}\Bigg($  $\Bigg) = (5, 3, 3, 2)$

$$D^{-1}\left(\ydiagram{5,3,3,2}\right) = (5,3,3,2)$$

$$D^{-1}\left(\ydiagram{9,6,4,1,1}\right)$$

D^{-1}  $= (5, 3, 3, 2)$

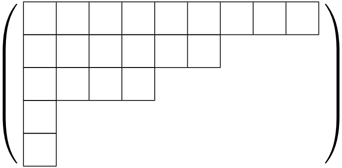
D^{-1}  $= (9, 6, 4, 1, 1)$

Diagrama transpuesto

Dado $A \subset \mathbb{N}^2$ se puede considerar el subconjunto transpuesto:

$$A^\top = \{(k, j) \colon (j, k) \in A\}.$$

Proposición

Si $A \in \mathcal{Y}$, entonces $A^\top \in \mathcal{Y}$.

Idea de demostración: Dados $(r, s), (j, k) \in A$, se cumple que $(r, s) \leq (j, k)$ si y sólo si $(s, r) \leq (k, j)$.

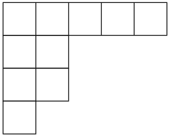
Por ejemplo,

$$\begin{aligned} D\big((5,2,2,1)\big)^{\top} &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1)\}^{\top} \\ &= \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(1,2),(2,2),(1,3),(2,3),(1,4)\} \\ &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(4,1),(5,1)\}. \end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$
\begin{aligned}
D\big((5,2,2,1)\big)^\top &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1)\}^\top \\
&= \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(1,2),(2,2),(1,3),(2,3),(1,4)\} \\
&= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(4,1),(5,1)\}.
\end{aligned}
$$

$$D\big((5,2,2,1)\big)^\top = \left(\quad \right)^\top$$



Por ejemplo,

$$\begin{aligned} D\big((5,2,2,1)\big)^{\top} &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1)\}^{\top} \\ &= \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(1,2),(2,2),(1,3),(2,3),(1,4)\} \\ &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(4,1),(5,1)\}. \end{aligned}$$

$$D\big((5,2,2,1)\big)^{\top} = \left(\ydiagram{5,2,2,1}\right)^{\top} = \ydiagram{4,3,1,1,1}\,.$$

Definición

Definimos la partición conjugada como

$$\lambda' = D^{-1}\left(D(\lambda)^{\top}\right).$$

Proposición

Las partes de la partición conjugada λ' están dadas por

$$\lambda'_k = \#\{j : \lambda_j \geq k\}.$$

$$\begin{aligned} D(\lambda)^\top &= \#\{j\colon (k,j) \in D(\lambda)^\top\} = \#\{j\colon (j,k) \in D(\lambda)\} \\ &= \{j\colon k \leq \lambda_j\} \end{aligned}$$

Corolario

$$\lambda'_k = \max(j\colon k \leq \lambda_j)$$

Proposición

Sea $\lambda \in \mathcal{P}$, entonces

$$\lambda'' = \lambda.$$

Idea de la demostración: Sea $A = D(\lambda)$, entonces $\left(A^\top\right)^\top = A$.

En particular $\lambda'_1 = \ell(\lambda)$ y $\lambda_1 = \ell(\lambda')$.

Ejemplo

Calculemos la partición conjugada λ' de $\lambda = (3, 2, 2, 1)$

Ejemplo

Calculemos la partición conjugada λ' de $\lambda = (3, 2, 2, 1)$

- $\lambda'_1 = \#\{j : \lambda_j \geq 1\}$

Ejemplo

Calculemos la partición conjugada λ' de $\lambda = (3, 2, 2, 1)$

- $\lambda'_1 = \#\{j : \lambda_j \geq 1\} = \#\{1, 2, 3, 4\} = 4,$

Ejemplo

Calculemos la partición conjugada λ' de $\lambda = (3, 2, 2, 1)$

- $\lambda'_1 = \#\{j : \lambda_j \geq 1\} = \#\{1, 2, 3, 4\} = 4,$
- $\lambda'_2 = \#\{j : \lambda_j \geq 2\}$

Ejemplo

Calculemos la partición conjugada λ' de $\lambda = (3, 2, 2, 1)$

- $\lambda'_1 = \#\{j : \lambda_j \geq 1\} = \#\{1, 2, 3, 4\} = 4,$
- $\lambda'_2 = \#\{j : \lambda_j \geq 2\} = \#\{1, 2, 3\} = 3,$

Ejemplo

Calculemos la partición conjugada λ' de $\lambda = (3, 2, 2, 1)$

- $\lambda'_1 = \#\{j : \lambda_j \geq 1\} = \#\{1, 2, 3, 4\} = 4,$
- $\lambda'_2 = \#\{j : \lambda_j \geq 2\} = \#\{1, 2, 3\} = 3,$
- $\lambda'_3 = \#\{j : \lambda_j \geq 3\}$

Ejemplo

Calculemos la partición conjugada λ' de $\lambda = (3, 2, 2, 1)$

- $\lambda'_1 = \#\{j : \lambda_j \geq 1\} = \#\{1, 2, 3, 4\} = 4,$
- $\lambda'_2 = \#\{j : \lambda_j \geq 2\} = \#\{1, 2, 3\} = 3,$
- $\lambda'_3 = \#\{j : \lambda_j \geq 3\} = \#\{1\} = 1.$

Ejemplo

Calculemos la partición conjugada λ' de $\lambda = (3, 2, 2, 1)$

- $\lambda'_1 = \#\{j : \lambda_j \geq 1\} = \#\{1, 2, 3, 4\} = 4,$
- $\lambda'_2 = \#\{j : \lambda_j \geq 2\} = \#\{1, 2, 3\} = 3,$
- $\lambda'_3 = \#\{j : \lambda_j \geq 3\} = \#\{1\} = 1.$

En efecto $\lambda'_1 = \ell(\lambda) = 4$ y $\lambda_1 = \ell(\lambda') = 3.$

¡Gracias!