Esquema de Horner
para calcular valores de polinomios

Objetivos. Mostrar el esquema de Horner que se usa para evaluar un polinomio en un punto, y una generalización de esta idea que se usa en la fórmula de Newton para el polinomio interpolante. Estas ideas se usaban antes de Horner, por ejemplo, en trabajos de Ruffini, y mucho antes, en trabajos de Qin Jiushao.

Requisitos. Polinomios, multiplicación de un polinomio por un binomio, idea de fórmulas recursivas.

1. Numeramos los coeficientes del polinomio a partir del coeficiente principal. En este tema es cómodo numerar los coeficientes de polinomios empezando con el coeficiente principal, es decir, en el orden descendente de las potencias. Empezamos los subíndices de los coeficientes desde 0. Por ejemplo, escribimos el polinomio $3 - 7x + 5x^2$ como

$$5x^2 - 7x + 3$$

y ponemos

$$c_0 = 5, \qquad c_1 = -7, \qquad c_2 = 3.$$

Si los coeficientes están dados como la lista 3, -7, 5, entonces desde el inicio la volteamos y escribimos como 5, -7, 3.

2. Ejemplos que muestran la idea. Usando la ley distributiva expandir la siguiente expresión en una suma de potencias de x:

$$(c_0x + c_1)x + c_2.$$

Usando la ley distributiva expandir la siguiente expresión en una suma de potencias de x:

$$((c_0x + c_1)x + c_2)x + c_3.$$

3. Representación de Horner. El polinomio

$$c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3 \tag{1}$$

se puede escribir como

$$((c_0x + c_1)x + c_2)x + c_3. \tag{2}$$

Decimos que (2) es la *representación de Horner* del polinomio (1).

4. Fórmulas recursivas. Dada una lista de coeficientes c_0, c_1, c_2, c_3, formamos los polinomios

$$\begin{aligned}
f_0(x) &:= c_0, \\
f_1(x) &:= c_0 x + c_1, \\
f_2(x) &:= c_0 x^2 + c_1 x + c_2, \\
f_3(x) &:= c_0 x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3.
\end{aligned}$$

Notamos que cada uno de los polinomios $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ se expresa a través del polinomio anterior:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= f_0(x)x + c_1, \\
f_2(x) &= f_1(x)x + c_2, \\
f_3(x) &= f_2(x)x + c_3.
\end{aligned}$$

Dado un punto a, denotamos el valor $f_j(a)$ por v_j. Entonces las fórmulas anteriores se convierten en

$$\begin{aligned}
v_0 &= c_0; \\
v_1 &= v_0 a + c_1; \\
v_2 &= v_1 a + c_2; \\
v_3 &= v_2 a + c_3.
\end{aligned}$$

5. Esquema de Horner escrito como una tabla. Los cálculos se pueden organizar en la siguiente tabla:

	c_0	c_1	c_2	c_3
a	$v_0 := c_0$	$v_1 := v_0 a + c_1$	$v_2 := v_1 a + c_2$	$v_3 := v_2 a + c_3$

Los elementos del primer renglón y el número a en el segundo renglón son los datos iniciales. Los números v_0, v_1, v_2, v_3 se calculan sucesivamente.

6. Ejemplo. Calculamos el valor del polinomio $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ en el punto 3:

	2	−3	0	1
3	2	3	9	28

$f(3) = 28.$

7. Ejercicio. Calcular el valor del polinomio $f(x) = -x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 2x + 4$ en el punto -2. Respuesta: -4.

8. Relación entre los algoritmos de Ruffini y de Horner. En el algoritmo de Ruffini se calculan los mismos números v_0, v_1, v_2, v_3. Los números v_0, v_1, v_2 son coeficientes del cociente al dividir el polinomio original $f(x)$ entre $x - a$. Si nos interesa solamente el valor $v_3 = f(a)$, entonces los números v_0, v_1, v_2 no se guardan.

9. Ejercicio. Consideramos el polinomio general de grado 4:

$$f(x) = c_0x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4.$$

Formar polinomios $f_0(x), \ldots, f_4(x)$ de manera similar al Ejemplo 4 y escribir los cálculos del algoritmo de Horner como una tabla.

Los siguientes ejemplos y ejercicios e usan en el tema "Expansión de polinomios en potencias de binomios".

10. Ejemplo. Como ya vimos, de la representación de Horner se puede pasar a una combinación lineal de potencias:

$$(c_0t + c_1)t + c_2 = c_0t^2 + c_1t + c_2.$$

Ahora escribimos la misma fórmula con $x - a$ en vez de t:

$$(c_0(x - a) + c_1)(x - a) + c_2 = c_0(x - a)^2 + c_1(x - a) + c_2.$$

11. Ejercicio. Pasar de la representación de Horner a una combinación lineal de potencias de $x - a$:

$$((c_0(x - a) + c_1)(x - a) + c_2)(x - a) + c_3.$$

Representación de Horner generalizada

La siguiente representación no tiene nombre estándar, pero aparece en la fórmula de Newton para el polinomio interpolante.

12. Ejemplo. Usando la ley distributiva expandimos la siguiente expresión:

$$(c_2x_1 + c_1)x_0 + c_0 = c_2x_1x_0 + c_1x_0 + c_0.$$

Hacemos lo mismo con $x - a_1$ en vez de x_1 y con $x - a_0$ en vez de x_0:

$$(c_2(x - a_1) + c_1)(x - a_0) + c_0 = c_2(x - a_1)(x - a_0) + c_1(x - a_0) + c_0.$$

13. Ejercicio. Transformar las siguientes expresiones de manera análoga al Ejemplo 12:

$$((c_3x_2 + c_2)x_1 + c_1)x_0 + c_0.$$

$$((c_3(x - a_2) + c_2)(x - a_1) + c_1)(x - a_0) + c_0.$$