Espacios de Hilbert unidimensionales con núcleo reproductor

Objetivos. Describir los EHNR unidimensionales.

Prerrequisitos. Teorema de Moore–Aronszajn.

Dado un núcleo K, denotamos por $H(K)$ el espacio de Hilbert con núcleo reproductor K. Su existencia y unicidad fue demostrada en el teorema de Moore–Aronszajn.

1 Proposición. *Sea X un conjunto y sea $f \in \mathbb{C}^X$. Supongamos que f es una función no nula, esto es, $f \neq 0_X$. Definimos $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$,*

$$K(x, y) \coloneqq f(x)\,\overline{f(y)}.$$

Entonces K es un núcleo, $H(K) = \mathbb{C}f$, y $\|f\| = 1$.

Primera demostración. De la definición de K se sigue que para cada x, y en X se cumple la igualdad

$$K_x(y) = K(y, x) = f(y)\,\overline{f(x)},$$

así que

$$K_x = \overline{f(x)}\,f. \tag{1}$$

Mostremos que K es un núcleo. Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\sum_{r,s=1}^{m} \overline{\alpha_r}\,\alpha_s\,K(x_r, x_s) = \left(\sum_{r=1}^{m} \overline{\alpha_r}\,f(x_r)\right)\left(\sum_{s=1}^{m} \overline{\overline{\alpha_s}\,f(x_s)}\right) = \left|\sum_{r=1}^{m} \overline{\alpha_r}\,f(x_r)\right|^2 \geq 0.$$

Pongamos

$$H_0 \coloneqq \ell\left(\left\{K_x\colon\ x \in X\right\}\right).$$

De (1) se sigue que $H_0 \subseteq \mathbb{C}\,f$. Usamos la suposición que f es no nula y encontramos a en X tal que $f(a) \neq 0$. Entonces, por (1), $f = (1/\overline{f(a)})\,K_x \in H_0$. Hemos mostrado que

$$H_0 = \mathbb{C}f.$$

Se sabe que cada espacio normado de dimensión finita es completo. Por lo tanto, H_0 es un subespacio cerrado de H. Por otro lado, sabemos que $H = \mathrm{cl}_H(H_0)$. Concluimos que $H = H_0 = \mathbb{C}f$.

Calculemos la norma de f en el espacio de H.

$$|f(a)|^2 = f(a)\,\overline{f(a)} = K_a(a) = \|K_a\|^2 = \|\overline{f(a)}\,f\|^2 = |f(a)|^2\,\|f\|^2.$$

De aquí se sigue que $\|f\| = 1$. $\square$

Segunda demostración. Pongamos que $H \coloneqq \mathbb{C}f$ y definimos $\varphi\colon H^2 \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$\varphi(\alpha f, \beta f) \coloneqq \alpha\,\overline{\beta}.$$

Es fácil ver que la definición es consistente y que φ es un producto interno. Como H es un espacio de dimensión finita, es automáticamente completo.

Probemos que K es un núcleo reproductor de H. Sean $g \in H$, $x \in X$. Encontramos α en $\mathbb{C}$ tal que $g = \alpha f$. Usamos la fórmula (1) que se sigue de la definición de K:

$$\langle g, K_x\rangle = \langle \alpha f, \overline{f(x)} f\rangle = \alpha\, f(x) = g(x). \qquad \square$$

La siguiente proposición se puede considerar como inversa a la Proposición 1. Es un caso particular de una proposición sobre EHNR de dimensión finita.

2 Proposición. *Sea X un conjunto y sea $H \le \mathbb{C}^X$ un espacio de Hilbert de dimensión 1. Sea $f \in H$ tal que $\|f\| = 1$. Entonces H es un EHNR y la función $K(x,y) \coloneqq f(x)\,\overline{f(y)}$ es su núcleo reproductor.*

Demostración. Probemos la propiedad reproductora. Sean $g \in H$, $x \in X$. Encontramos α en $\mathbb{C}$ tal que $g = \alpha f$. Usamos la fórmula (1) que se sigue de la definición de K:

$$\langle g, K_x\rangle = \langle \alpha f, \overline{f(x)} f\rangle = \alpha\, f(x) = g(x). \qquad \square$$