La función mín como núcleo

Objetivos. Demostrar que la función $K(x, y) := \min\{x, y\}$, definida en $[0, +\infty)^2$, es un núcleo.

Prerrequisitos. Núcleos, matrices positivas.

Denotamos por $1_{n \times n}$ la matriz $n \times n$ tal que todas sus componentes son 1:

$$1_{n \times n} := [1]_{r,s=1}^n.$$

1 Lema (la matriz de unos es positiva). $1_{n \times n} \geq 0$. Esta matriz tiene valor propio n de multiplicidad 1 y valor propio 0 de multiplicidad $n - 1$.

2 Lema (repasso: la suma de dos matrices positivas es positiva). Sean $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tales que $P \geq 0$ y $Q \geq 0$. Entonces $P + Q \geq 0$.

Demostración. Para cada ξ en $\mathbb{C}^n$,

$$\langle (P + Q)\xi, \xi \rangle = \langle P\xi, \xi \rangle + \langle Q\xi, \xi \rangle \geq 0. \quad \square$$

3 Proposición (una matriz diagonal por bloques, con bloques positivos). Sean $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $Q \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ tales que $P \geq 0$ y $Q \geq 0$, y sea

$$A := \text{diag}(P, Q).$$

Entonces $A \geq 0$.

4 Definición (matriz de permutación). Sea $\sigma \in S_m$. Definimos P_σ mediante la siguiente regla:

$$P_\sigma := [\delta_{r, \sigma(s)}]_{r,s=1}^m.$$

Se sabe que $P_\sigma^{-1} = P_\sigma^\top$.

5 Proposición. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A \geq 0$ y sea $\sigma \in S_n$. Entonces $P_\sigma^\top A P_\sigma \geq 0$.

6 Proposición. Sean $K: X^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $x_1, \dots, x_m \in X$, $\sigma \in S_m$. Entonces

$$P_\sigma^\top G_K(x_1, \dots, x_m) P_\sigma = G_K(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}).$$

Demostración.

$$(P_\sigma^\top G_K(x_1, \dots, x_m) P_\sigma)_{r,s} = \sum_{p,q=1}^m \delta_{p,\sigma(r)} K(x_p, x_q) \delta_{q,\sigma(s)} = K(x_{\sigma(r)}, x_{\sigma(s)}). \quad \square$$

7 Proposición. Pongamos $X := [0, +\infty)$ y definimos $K: X^2 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$K(x, y) := \min\{x, y\}.$$

Entonces K es un núcleo.

Demostración. Mostremos por inducción que para cada $m \in \mathbb{N}$ se cumple la siguiente afirmación $\mathcal{A}(m)$: para cada $x_1, \dots, x_m \in X$, $G_K(x_1, \dots, x_m) \geq 0$.

Para $m = 1$ tenemos $G_K(x_1) = [x_1] \geq 0$.

Suponemos que se cumple $\mathcal{A}(m-1)$ y probemos $\mathcal{A}(m)$. Sean $x_1, \dots, x_m \in X$. Gracias a la Proposición 6, podemos suponer que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m$. Entonces

$$G_K(x_1, \dots, x_m) = \begin{bmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \dots & x_m \\ x_1 & x_2 & x_2 & \dots & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_m \end{bmatrix}.$$

Podemos descomponer esta matriz de la siguiente manera:

$$G_K(x_1, \dots, x_m) = x_1 1_{m \times m} + \text{diag}(0_{1 \times 1}, B), \quad (1)$$

donde B es de la forma

$$B = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_2 - x_1 & \dots & x_m - x_1 \\ x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_3 - x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_m - x_1 \end{bmatrix}.$$

De manera más formal,

$$\begin{aligned} B &= [x_{\min\{r+1, s+1\}} - x_1]_{r,s=1}^{m-1} = [\min\{x_{r+1} - x_1, x_{s+1} - x_1\}]_{r,s=1}^{m-1} \\ &= G_K(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_m - x_1). \end{aligned}$$

Por la hipótesis de inducción $\mathcal{A}(m-1)$, tenemos que $B \geq 0$. Luego de la fórmula (1) se sigue que $G_K(x_1, \dots, x_m) \geq 0$. $\square$

Por el teorema de Moore–Aronszajn, está definido el EHNR H_K sobre el dominio $[0, +\infty)$ tal que su núcleo reproductor es $K(x, y) := \min\{x, y\}$. Por ahora, no vamos a describir este espacio. Solamente daremos un ejemplo de elementos de este espacio.

8 Ejemplo. Sean $y_1, y_2, \dots, y_m \geq 0$ tales que $y_1 < y_2 < \dots < y_m$, y sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$. Pongamos

$$f := \sum_{j=1}^m \alpha_j K_{y_j}.$$

Notemos que si $0 \leq x \leq y_1$, entonces

$$K_{y_1}(x) = x, \quad K_{y_2}(x) = x, \quad K_{y_3}(x) = x, \quad \dots, \quad K_{y_m}(x) = x.$$

Por lo tanto, si $0 \leq x \leq y_1$, entonces

$$f(x) = \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j \right) x.$$

Ahora suponemos que $y_1 \leq x \leq y_2$. Entonces

$$K_{y_1}(x) = y_1, \quad K_{y_2}(x) = x, \quad K_{y_3}(x) = x, \quad \dots, \quad K_{y_m}(x) = x.$$

Por lo tanto, si $y_1 \leq x \leq y_2$, entonces

$$f(x) = \alpha_1 y_1 + \left(\sum_{j=2}^m \alpha_j \right) x.$$

En general, si $y_{q-1} \leq x \leq y_q$, entonces

$$f(x) = \sum_{j=1}^{q-1} \alpha_j y_j + \left(\sum_{j=q}^m \alpha_j \right) x.$$

Notemos que f es continua y lineal a trozos.

9 Ejercicio. Sea $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua y lineal a trozos, con un número finito de “nodos”. Demostrar que $f \in H_K$.