Núcleos y continuidad

Objetivos. Sea X un espacio topológico y sea H un espacio de Hilbert de funciones definidas en X con núcleo reproductor K. Mostremos que si K es una función continua, entonces cada función del espacio H es continua.

Prerrequisitos. Teorema de Moore–Aronszajn, continuidad de funciones, topología del producto de espacios topológicos.

1 Proposición. *Sea X un espacio topológico y sea H un espacio de Hilbert de funciones definidas en X con núcleo reproductor K. Supongamos que la función K es continua. Entonces, $H \subseteq C(X)$.*

Demostración. Sea $f \in H$ y sea $a \in X$. Mostremos que f es continua en a. Sea $\varepsilon > 0$. Como K es continua en (a, a), elegimos $V \in \tau_{X\times X}(a, a)$ tal que

$$\forall (x, y) \in V \qquad |K(x, y) - K(a, a)| < \frac{\varepsilon^2}{3(\|f\|^2 + 1)}.$$

Usando la definición de la topología del producto en $X \times X$, encontramos W en $\tau_X(a)$ tal que $W \times W \subseteq V$. Entonces, para cada x en W, obtenemos

$$\begin{aligned} \|K_x - K_a\|^2 &= \langle K_x - K_a, K_x - K_a\rangle = K(x, x) - K(a, x) - K(x, a) + K(a, a) \\ &= \big(K(x, x) - K(a, a)\big) - \big(K(x, a) - K(a, a)\big) - \big(K(a, x) - K(a, a)\big). \end{aligned}$$

De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} \|K_x - K_a\|^2 &\le \big|K(x, x) - K(a, a)\big| + \big|K(x, a) - K(a, a)\big| + \big|K(a, x) - K(a, a)\big| \\ &\le 3 \cdot \frac{\varepsilon^2}{3(\|f\|^2 + 1)} = \frac{\varepsilon^2}{\|f\|^2 + 1}. \end{aligned}$$

Luego, por la desigualdad de Schwarz,

$$|f(x) - f(a)| = \big|\langle f, K_x\rangle - \langle f, K_a\rangle\big| = \big|\langle f, K_x - K_a\rangle\big| \le \|f\|\,\|K_x - K_a\| < \varepsilon. \qquad \square$$