Núcleos que se representan como sumas finitas de productos

Egor Maximenko, con ideas de Edwar Alexis Ramírez Ardila

`https://esfm.egormaximenko.com`

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

16 de febrero de 2023

Plan

Objetivo

Estudiar la situación cuando el núcleo reproductor se representa como

$$K(x, y) = \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\overline{b_j(y)}.$$

Prerrequisitos

- Marcos de Parseval.
- Criterio de pertenencia de una función al EHNR dado.

Plan

Repaso: una suma finita de productos es un núcleo

Proposición

Sea X un conjunto, sea J un conjunto finito y sea $(b_j)_{j \in J} \in (\mathbb{C}^X)^J$. Definimos $L \colon X^2 \to \mathbb{C}$,

$$L(x, y) := \sum_{j \in J} b_j(x) \overline{b_j(y)}.$$

Entonces L es un núcleo.

Primera demostración

Sean $x_1, \ldots, x_m \in X$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\sum_{r,s=1}^{m} \overline{\alpha_r}\, \alpha_s L(x_r, x_s)$$

Primera demostración

Sean $x_1, \dots, x_m \in X$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\sum_{r,s=1}^{m} \overline{\alpha_r}\, \alpha_s L(x_r, x_s) =$$

Primera demostración

Sean $x_1, \ldots, x_m \in X$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\sum_{r,s=1}^{m} \overline{\alpha_r}\, \alpha_s L(x_r, x_s) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{r=1}^{m} \overline{\alpha_r} b_j(x_r) \right) \left(\sum_{s=1}^{m} \alpha_s b_j(x_s) \right)$$

Primera demostración

Sean $x_1, \dots, x_m \in X$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\sum_{r,s=1}^{m} \overline{\alpha_r}\, \alpha_s L(x_r, x_s) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{r=1}^{m} \overline{\alpha_r} b_j(x_r) \right) \left(\sum_{s=1}^{m} \alpha_s b_j(x_s) \right) =$$

Primera demostración

Sean $x_1, \dots, x_m \in X$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\sum_{r,s=1}^{m} \overline{\alpha_r}\,\alpha_s L(x_r, x_s) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{r=1}^{m} \overline{\alpha_r} b_j(x_r) \right) \left(\sum_{s=1}^{m} \alpha_s b_j(x_s) \right) = \sum_{j \in J} \left| \sum_{r=1}^{m} \overline{\alpha_r} b_j(x_r) \right|^2$$

Primera demostración

Sean $x_1, \ldots, x_m \in X$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\sum_{r,s=1}^{m} \overline{\alpha_r}\,\alpha_s L(x_r, x_s) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{r=1}^{m} \overline{\alpha_r} b_j(x_r) \right) \left(\sum_{s=1}^{m} \alpha_s b_j(x_s) \right) = \sum_{j \in J} \left| \sum_{r=1}^{m} \overline{\alpha_r} b_j(x_r) \right|^2 \geq$$

Primera demostración

Sean $x_1, \ldots, x_m \in X$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\sum_{r,s=1}^{m} \overline{\alpha_r}\, \alpha_s L(x_r, x_s) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{r=1}^{m} \overline{\alpha_r} b_j(x_r) \right) \left(\sum_{s=1}^{m} \alpha_s b_j(x_s) \right) = \sum_{j \in J} \left| \sum_{r=1}^{m} \overline{\alpha_r} b_j(x_r) \right|^2 \geq 0.$$

Segunda demostración

Sean $x_1, \ldots, x_m \in X$. Pongamos $x \coloneqq (x_1, \ldots, x_m)$.

Segunda demostración

Sean $x_1, \ldots, x_m \in X$. Pongamos $x \coloneqq (x_1, \ldots, x_m)$.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, pongamos $v_j \coloneqq \left[b_j(x_s)\right]_{s=1}^{m}$.

Segunda demostración

Sean $x_1, \ldots, x_m \in X$. Pongamos $x \coloneqq (x_1, \ldots, x_m)$.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, pongamos $v_j \coloneqq \left[b_j(x_s)\right]_{s=1}^{m}$.

Calculemos la matriz de Gram $G_L(x_1, \ldots, x_m)$.

$$G_L(x)_{r,s}$$

Segunda demostración

Sean $x_1, \ldots, x_m \in X$. Pongamos $x \coloneqq (x_1, \ldots, x_m)$.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, pongamos $v_j \coloneqq \left[b_j(x_s)\right]_{s=1}^{m}$.

Calculemos la matriz de Gram $G_L(x_1, \ldots, x_m)$.

$$G_L(x)_{r,s} =$$

Segunda demostración

Sean $x_1, \ldots, x_m \in X$. Pongamos $x \coloneqq (x_1, \ldots, x_m)$.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, pongamos $v_j \coloneqq \left[b_j(x_s)\right]_{s=1}^{m}$.

Calculemos la matriz de Gram $G_L(x_1, \ldots, x_m)$.

$$G_L(x)_{r,s} = L(x_r, x_s)$$

Segunda demostración

Sean $x_1, \ldots, x_m \in X$. Pongamos $x \coloneqq (x_1, \ldots, x_m)$.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, pongamos $v_j \coloneqq \left[b_j(x_s)\right]_{s=1}^{m}$.

Calculemos la matriz de Gram $G_L(x_1, \ldots, x_m)$.

$$G_L(x)_{r,s} = L(x_r, x_s) =$$

Segunda demostración

Sean $x_1, \ldots, x_m \in X$. Pongamos $x \coloneqq (x_1, \ldots, x_m)$.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, pongamos $v_j \coloneqq \left[b_j(x_s)\right]_{s=1}^{m}$.

Calculemos la matriz de Gram $G_L(x_1, \ldots, x_m)$.

$$G_L(x)_{r,s} = L(x_r, x_s) = \sum_{j \in J} b_j(x_r)\overline{b_j(x_s)}$$

Segunda demostración

Sean $x_1, \ldots, x_m \in X$. Pongamos $x \coloneqq (x_1, \ldots, x_m)$.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, pongamos $v_j \coloneqq \left[b_j(x_s)\right]_{s=1}^{m}$.

Calculemos la matriz de Gram $G_L(x_1, \ldots, x_m)$.

$$G_L(x)_{r,s} = L(x_r, x_s) = \sum_{j \in J} b_j(x_r)\overline{b_j(x_s)} =$$

Segunda demostración

Sean $x_1, \ldots, x_m \in X$. Pongamos $x \coloneqq (x_1, \ldots, x_m)$.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, pongamos $v_j \coloneqq \left[b_j(x_s)\right]_{s=1}^{m}$.

Calculemos la matriz de Gram $G_L(x_1, \ldots, x_m)$.

$$G_L(x)_{r,s} = L(x_r, x_s) = \sum_{j \in J} b_j(x_r)\overline{b_j(x_s)} = \sum_{j \in J} \left(v_j\, v_j^*\right)_{r,s}.$$

Segunda demostración

Sean $x_1, \ldots, x_m \in X$. Pongamos $x \coloneqq (x_1, \ldots, x_m)$.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, pongamos $v_j \coloneqq \left[b_j(x_s)\right]_{s=1}^m$.

Calculemos la matriz de Gram $G_L(x_1, \ldots, x_m)$.

$$G_L(x)_{r,s} = L(x_r, x_s) = \sum_{j\in J} b_j(x_r)\overline{b_j(x_s)} = \sum_{j\in J} \left(v_j\, v_j^*\right)_{r,s}.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{G_L(x) = \textstyle\sum_{j\in J} v_j\, v_j^*.}$$

Segunda demostración

Sean $x_1, \ldots, x_m \in X$. Pongamos $x \coloneqq (x_1, \ldots, x_m)$.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, pongamos $v_j \coloneqq \big[b_j(x_s)\big]_{s=1}^{m}$.

Calculemos la matriz de Gram $G_L(x_1, \ldots, x_m)$.

$$G_L(x)_{r,s} = L(x_r, x_s) = \sum_{j \in J} b_j(x_r)\overline{b_j(x_s)} = \sum_{j \in J} \big(v_j\, v_j^*\big)_{r,s}.$$

Por lo tanto,

$$G_L(x) = \textstyle\sum_{j \in J} v_j\, v_j^*.$$

Esta matriz es positiva, por ser una suma de matrices positivas.

Plan

EHNR con núcleo representado como una suma finita de productos

La siguiente proposición es una variante del teorema de Papadakis.

Proposición

Sean X un conjunto y H un EHNR sobre X. Denotamos por K el núcleo reproductor de H. Más aún, supongamos que $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}^X$ y para cada x, y en X

$$K(x, y) = \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\overline{b_j(y)}.$$

Entonces:

1) $b_1, \ldots, b_n \in H$,
2) $(b_j)_{j=1}^{n}$ es un marco de Parseval para H,
3) $H = \operatorname{lin}(b_1, \ldots, b_n)$.

Demostración: $b_1, \ldots, b_n \in H$

Sea $p \in \{1, \ldots, n\}$.

Demostración: $b_1, \dots, b_n \in H$

Sea $p \in \{1, \dots, n\}$.

Consideremos la función

$$L(x,y) := K(x,y) - b_p(x)\overline{b_p(y)}.$$

Demostración: $b_1, \ldots, b_n \in H$

Sea $p \in \{1, \ldots, n\}$.

Consideremos la función

$$L(x,y) := K(x,y) - b_p(x)\overline{b_p(y)}.$$

En otras palabras,

$$L(x,y) = \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{p\}} b_j(x)\overline{b_j(y)}.$$

Demostración: $b_1, \ldots, b_n \in H$

Sea $p \in \{1, \ldots, n\}$.

Consideremos la función

$$L(x, y) := K(x, y) - b_p(x)\overline{b_p(y)}.$$

En otras palabras,

$$L(x, y) = \sum_{j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{p\}} b_j(x)\overline{b_j(y)}.$$

Por la proposición anterior aplicada con $J = \{1, \ldots, n\} \setminus \{p\}$, L es un núcleo.

Demostración: $b_1, \ldots, b_n \in H$

Sea $p \in \{1, \ldots, n\}$.

Consideremos la función

$$L(x, y) := K(x, y) - b_p(x)\overline{b_p(y)}.$$

En otras palabras,

$$L(x, y) = \sum_{j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{p\}} b_j(x)\overline{b_j(y)}.$$

Por la proposición anterior aplicada con $J = \{1, \ldots, n\} \setminus \{p\}$, L es un núcleo.

Por el criterio de pertenencia de una función al EHNR, concluimos que $b_p \in H$.

Demostración: K_y es una combinación lineal de $b_1, \ldots, b_n$

Por la suposición,

$$K(x, y) = \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\overline{b_j(y)}.$$

Demostración: K_y es una combinación lineal de $b_1, \ldots, b_n$

Por la suposición,

$$K(x, y) = \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\overline{b_j(y)}.$$

En otras palabras, para cada y en X,

Demostración: K_y es una combinación lineal de $b_1, \ldots, b_n$

Por la suposición,

$$K(x, y) = \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\overline{b_j(y)}.$$

En otras palabras, para cada y en X,

$$K_y$$

Demostración: K_y es una combinación lineal de $b_1, \ldots, b_n$

Por la suposición,

$$K(x,y) = \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\overline{b_j(y)}.$$

En otras palabras, para cada y en X,

$$K_y =$$

Demostración: K_y es una combinación lineal de $b_1, \ldots, b_n$

Por la suposición,

$$K(x, y) = \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\overline{b_j(y)}.$$

En otras palabras, para cada y en X,

$$K_y = \sum_{j=1}^{n} \overline{b_j(y)}\, b_j.$$

Demostración: $(b_1, \ldots, b_n)$ es un marco de Parseval

Sea $f \in H$.

Demostración: $(b_1, \ldots, b_n)$ es un marco de Parseval

Sea $f \in H$.

Para cada y en H, por la propiedad reproductora,

Demostración: $(b_1, \ldots, b_n)$ es un marco de Parseval

Sea $f \in H$.

Para cada y en H, por la propiedad reproductora,

$$f(y)$$

Demostración: $(b_1, \ldots, b_n)$ es un marco de Parseval

Sea $f \in H$.

Para cada y en H, por la propiedad reproductora,

$$f(y) =$$

Demostración: $(b_1, \ldots, b_n)$ es un marco de Parseval

Sea $f \in H$.

Para cada y en H, por la propiedad reproductora,

$$f(y) = \langle f, K_y \rangle$$

Demostración: $(b_1, \ldots, b_n)$ es un marco de Parseval

Sea $f \in H$.

Para cada y en H, por la propiedad reproductora,

$$f(y) = \langle f, K_y \rangle =$$

Demostración: $(b_1, \ldots, b_n)$ es un marco de Parseval

Sea $f \in H$.

Para cada y en H, por la propiedad reproductora,

$$f(y) = \langle f, K_y \rangle = \left\langle f, \sum_{j=1}^{n} \overline{b_j(y)}\, b_j \right\rangle$$

Demostración: $(b_1, \ldots, b_n)$ es un marco de Parseval

Sea $f \in H$.

Para cada y en H, por la propiedad reproductora,

$$f(y) = \langle f, K_y \rangle = \left\langle f, \sum_{j=1}^{n} \overline{b_j(y)}\, b_j \right\rangle =$$

Demostración: $(b_1, \ldots, b_n)$ es un marco de Parseval

Sea $f \in H$.

Para cada y en H, por la propiedad reproductora,

$$f(y) = \langle f, K_y \rangle = \left\langle f, \sum_{j=1}^{n} \overline{b_j(y)}\, b_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} b_j(y) \, \langle f, b_j \rangle$$

Demostración: $(b_1, \ldots, b_n)$ es un marco de Parseval

Sea $f \in H$.

Para cada y en H, por la propiedad reproductora,

$$f(y) = \langle f, K_y \rangle = \left\langle f, \sum_{j=1}^{n} \overline{b_j(y)}\, b_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} b_j(y) \langle f, b_j \rangle =$$

Demostración: $(b_1, \ldots, b_n)$ es un marco de Parseval

Sea $f \in H$.

Para cada y en H, por la propiedad reproductora,

$$f(y) = \langle f, K_y \rangle = \left\langle f, \sum_{j=1}^{n} \overline{b_j(y)}\, b_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} b_j(y)\, \langle f, b_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle f, b_j \rangle\, b_j(y).$$

Demostración: $(b_1, \ldots, b_n)$ es un marco de Parseval

Sea $f \in H$.

Para cada y en H, por la propiedad reproductora,

$$f(y) = \langle f, K_y \rangle = \left\langle f, \sum_{j=1}^{n} \overline{b_j(y)}\, b_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} b_j(y)\, \langle f, b_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle f, b_j \rangle\, b_j(y).$$

Por lo tanto,

$$f = \sum_{j=1}^{n} \langle f, b_j \rangle\, b_j.$$

Esto significa que $(b_j)_{j=1}^{n}$ es un marco de Parseval para H.

Demostración: $H = \mathrm{lin}(b_1, \ldots, b_n)$

Hemos mostrado que para cada f en H,

$$f = \sum_{j=1}^{n} \langle f, b_j \rangle \, b_j.$$

Demostración: $H = \operatorname{lin}(b_1, \ldots, b_n)$

Hemos mostrado que para cada f en H,

$$f = \sum_{j=1}^{n} \langle f, b_j \rangle \, b_j.$$

Por lo tanto,

$$H \subseteq \operatorname{lin}(b_1, \ldots, b_n).$$

Demostración: $H = \operatorname{lin}(b_1, \ldots, b_n)$

Hemos mostrado que para cada f en H,

$$f = \sum_{j=1}^{n} \langle f, b_j \rangle \, b_j.$$

Por lo tanto,

$$H \subseteq \operatorname{lin}(b_1, \ldots, b_n).$$

Por otro lado, hemos mostrado que $b_1, \ldots, b_n \in H$.

Demostración: $H = \mathrm{lin}(b_1, \ldots, b_n)$

Hemos mostrado que para cada f en H,

$$f = \sum_{j=1}^{n} \langle f, b_j \rangle \, b_j.$$

Por lo tanto,

$$H \subseteq \mathrm{lin}(b_1, \ldots, b_n).$$

Por otro lado, hemos mostrado que $b_1, \ldots, b_n \in H$. Esto implica que

$$\mathrm{lin}(b_1, \ldots, b_n) \subseteq H.$$

Plan

Repaso: ¿cuándo un marco de Parseval finito es una base ortonormal?

Proposición

Sea H un espacio de Hilbert y sean $b_1, \ldots, b_n \in H$ tales que:

- $(b_1, \ldots, b_n)$ es un marco de Parseval para H,
- $(b_1, \ldots, b_n)$ es linealmente independiente.

Entonces $(b_1, \ldots, b_n)$ es una base ortonormal para H.

El caso de una lista de funciones linealmente independiente

Corolario

Sea X un conjunto y sea y H un EHNR sobre X.

Denotemos por K el núcleo reproductor de H.

Supongamos que

- $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}^X$,
- la lista $(b_1, \ldots, b_n)$ es linealmente independiente,
- para cada x, y en X,

$$K(x, y) = \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\overline{b_j(y)}.$$

Entonces $(b_1, \ldots, b_n)$ es una base ortonormal de H.