Núcleos que se representan como ciertas sumas finitas de productos

1 Proposición. *Sea X un conjunto, sea J un conjunto finito y sea $(b_j)_{j\in J}$ una familia cuyos elementos pertenecen a $\mathbb{C}^X$. Pongamos*

$$L(x,y) \coloneqq \sum_{j\in J} b_j(x)\overline{b_j(y)}.$$

Entonces L es un núcleo.

Primera demostración. Sean $x_1,\ldots,x_m \in X$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_m \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\sum_{r,s=1}^{m} \overline{\alpha_r}\,\alpha_s L(x_r,x_s) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{r=1}^{m}\overline{\alpha_r} b_j(x_r)\right)\left(\sum_{s=1}^{m}\alpha_s b_j(x_s)\right) = \sum_{j\in J}\left|\sum_{r=1}^{m}\overline{\alpha_r} b_j(x_r)\right|^2 \geq 0. \qquad \square$$

Segunda demostración. Calcular la matriz de Gram $G_L(x_1,\ldots,x_m)$. $\square$

La siguiente proposición es una variante del teorema de Papadakis.

2 Proposición. *Sean X un conjunto y H un EHNR sobre X. Denotamos por K el núcleo reproductor de H. Más aún, supongamos que $b_1,\ldots,b_n \in \mathbb{C}^X$ y para cada x,y en X*

$$K(x,y) = \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\overline{b_j(y)}.$$

En otras palabras,

$$K_y = \sum_{j=1}^{n} \overline{b_j(y)}\, b_j.$$

Entonces:

1) $b_1,\ldots,b_n \in H$,

2) $(b_j)_{j=1}^n$ *es un marco de Parseval para* H,

3) $H = \ell(b_1,\ldots,b_n)$.

Demostración. 1. Sea $p \in \{1, \ldots, n\}$. Consideremos la función

$$L(x, y) \coloneqq K(x, y) - b_p(x)\overline{b_p(y)},$$

esto es,

$$L(x, y) = \sum_{j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{p\}} b_j(x)\overline{b_j(y)}.$$

Por la Proposición 1, L es un núcleo. Por el criterio de pertenencia de una función al EHNR, concluimos que $b_p \in H$.

2. Sea $f \in H$. Entonces para cada y en H tenemos que

$$f(y) = \langle f, K_y \rangle = \left\langle f, \sum_{j=1}^{n} \overline{b_j(y)}\, b_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} b_j(y)\, \langle f, b_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle f, b_j \rangle\, b_j(y).$$

Por lo tanto,

$$f = \sum_{j=1}^{n} \langle f, b_j \rangle\, b_j. \tag{1}$$

Esto significa que $(b_j)_{j=1}^{n}$ es un marco de Parseval para H.

3. De (1) se sigue que $H \subseteq \ell(b_1, \ldots, b_n)$. La contención recíproca se sigue del inciso 1. □

3 Proposición. *Sea H un espacio de Hilbert y sean $b_1, \ldots, b_n \in H$ tales que $(b_1, \ldots, b_n)$ es un marco de Parseval para H. Supongamos que la lista $(b_1, \ldots, b_n)$ es linealmente independiente. Entonces $(b_1, \ldots, b_n)$ es una base ortonormal para H.*

Demostración. Por la definición (o criterio) del marco de Parseval, para cada f en H tenemos que

$$f = \sum_{j=1}^{n} \langle f, b_j \rangle b_j.$$

Esto implica que $H = \ell(b_1, \ldots, b_n)$.

Mostremos que la lista $(b_1, \ldots, b_n)$ es ortonormal. Denotemos por P la matriz de Gram de la lista $(b_1, \ldots, b_n)$:

$$P \coloneqq G(b_1, \ldots, b_n),$$

esto es,

$$P = \big[\langle b_s, b_r \rangle\big]_{r,s=1}^{n}.$$

Como $(b_1, \ldots, b_n)$ es un marco de Parseval, para cada s en $\{1, \ldots, n\}$ obtenemos

$$b_s = \sum_{j=1}^{n} \langle b_s, b_j \rangle b_j.$$

Por lo tanto, para cada r, s en $\{1, \ldots, n\}$,

$$P_{r,s} = \langle b_s, b_r \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle b_s, b_j \rangle b_j, b_r \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle b_s, b_j \rangle \langle b_j, b_r \rangle = \sum_{j=1}^{n} P_{r,s} P_{j,s}.$$

Hemos mostrado que $P^2 = P$. Como $(b_1, \ldots, b_n)$ es una lista linealmente independiente, P es invertible. Por lo tanto, $P = I_n$. $\square$

4 Corolario. *Sean X un conjunto y H un EHNR sobre X. Denotemos por K el núcleo reproductor de H. Supongamos que $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}^X$, la lista $(b_1, \ldots, b_n)$ es linealmente independiente, y para cada x, y en X*

$$K(x, y) = \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \overline{b_j(y)}.$$

Entonces $(b_1, \ldots, b_n)$ es una base ortonormal de H.

5 Observación. En las condiciones del Corolario, demostremos de manera directa que $b_1, \ldots, b_n \in H$. Como las funciones $b_1, \ldots, b_n$ son linealmente independientes, existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que la matriz

$$\big[b_r(x_s) \big]_{r,s=1}^{n}$$

es invertible. También es invertible su matriz transpuesta conjugada. Denotemos por Q su inversa. Entonces para cada r, s en $\{1, \ldots, n\}$,

$$\sum_{s=1}^{n} Q_{r,s} \overline{b_j(x_s)} = \delta_{r,j}.$$

Luego para cada r en $\{1, \ldots, n\}$

$$\sum_{s=1}^{n} Q_{r,s} K_{x_s} = \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Q_{r,s} \overline{b_j(x_s)}\, b_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{n} Q_{r,s} \overline{b_j(x_s)} \right) b_j = \sum_{j=1}^{n} \delta_{r,j} b_j = b_r.$$

Hemos mostrado que $b_r \in \ell(K_{x_1}, \ldots, K_{x_n}) \subseteq H$.