Interpolación en un EHNR

Este texto es muy cercano a la Sección 3.1 del libro de Paulsen y Raghupathi "An introduction to the theory of reproducing kernel Hilbert spaces".

1 Definición. Sea X un conjunto, sea $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ tal que $x_1, \ldots, x_n$ son diferentes a pares y sea $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Decimos que una función $g\colon X \to \mathbb{C}$ interpola (x, λ) si $g(x_j) = \lambda_j$ para cada j en $\{1, \ldots, n\}$. Algunos autores en esta situación prefieren decir que g interpola los puntos $(x_1, \lambda_1), \ldots, (x_n, \lambda_n)$.

En este tema suponemos que H es un EHNR sobre un conjunto X. Denotamos por K el NR de H. Suponemos que $x \in X^n$ y que los puntos $x_1, \ldots, x_n$ son diferentes a pares. Pongamos

$$Y \coloneqq \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Denotemos por H_Y el subespacio vectorial denerado por las funciones H_y, $y \in Y$:

$$H_Y \coloneqq \ell(\{K_y\colon\ y \in Y\}) = \ell(K_{x_1}, \ldots, K_{x_n}).$$

Notemos que H_Y es un subespacio de H de dimensión finita. Las funciones $K_{x_1}, \ldots, K_{x_n}$ pueden ser linealmente dependientes, por eso solamente podemos afirmar que

$$\dim(H_Y) \le n.$$

Sea $P_Y\colon H \to H$ el operador de proyección ortogonal sobre H_Y. En otras palabras,

$$\forall g, h \in H \qquad \Bigl(P_Y g = h \quad\Longleftrightarrow\quad h \in H_Y \quad \wedge \quad g - h \in H_Y^\perp\Bigr).$$

Sabemos que $\operatorname{im}(P_Y) = H_Y$ y $\ker(P_Y) = H_Y^\perp$.

2 Proposición. . *Sean $x_1, \ldots, x_n \in X$ puntos diferentes a pares y sea $Y \coloneqq \{x_1, \ldots, x_n\}$. Entonces*

$$\bigl\{f \in H\colon\quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \quad f(x_j) = 0\bigr\} = H_Y^\perp = \ker(P_Y).$$

Demostración. La primera igualdad se sigue de la propiedad reproductora:

$$\Bigl(\forall j \in \{1, \ldots, n\} \quad f(x_j) = 0\Bigr) \quad\Longleftrightarrow\quad \Bigl(\forall j \in \{1, \ldots, n\} \quad \langle f, K_{x_j}\rangle = 0\Bigr).$$

La segunda igualdad es una propiedad general de las proyecciones ortogonales. □

3 Proposición. *Para cada g en H y cada j en $\{1, \ldots, n\}$,*

$$(P_Y g)(x_j) = g(x_j).$$

Demostración. Sea $g \in H$. Pongamos $u \coloneqq g - P_Y g$. Entonces, por la definición de P_Y, $u \in H_Y^\perp$. Por la Proposición 2, la función u se anula en los puntos $x_1, \ldots, x_n$. Luego $(P_Y g)(x_j) = g(x_j)$ para cada j en $\{1, \ldots, n\}$. □

4 Corolario. *Sea $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Si g interpola (x, λ), entonces $P_Y g$ también interpola (x, λ).*

Dado λ en $\mathbb{C}^n$, denotemos por $S_{H,x,\lambda}$ al conjunto de las funciones de la clase H que interpolan (x, λ):

$$S_{H,x,\lambda} \coloneqq \big\{ f \in H\colon \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \quad f(x_j) = \lambda_j \big\}.$$

5 Proposición. *Sea $\lambda \in \mathbb{C}^n$ y sean $f, g \in S_{H,x,\lambda}$. Entonces*

$$P_Y f = P_Y g.$$

Demostración. Pongamos $u \coloneqq f - g$. Entonces $u(x_j) = \lambda_j$ para cada j en $\{1, \ldots, n\}$. Por la Proposición 2, tenemos que $u \in H_Y^\perp$. Por la definición del operador de proyección P_Y, esto implica que $P_Y u = 0_H$. Concluimos que $P_Y f = P_Y g$. □

6 Proposición. *Sea $\lambda \in \mathbb{C}^n$ y sea $g \in S_{H,x,\lambda}$. Entonces*

$$S_{H,x,\lambda} = P_Y g + H_Y^\perp.$$

Más aún, $P_Y g$ es el elemento de norma mínima en el conjunto $S_{H,x,\lambda}$.

Demostración. 1. Por la Proposición 3, obtenemos que $P_Y g \in S_{H,x,\lambda}$.

2. Sea $h \in H_Y^\perp$. Entonces, por la Proposición 2, h se anula en Y. Luego $P_Y(g) + h \in S_{H,x,\lambda}$.

3. Sea $f \in S_{H,x,\lambda}$. Entonces $f - P_Y g$ se anula en Y. Por la Proposición 2, $f - P_Y g \in H_Y^\perp$.

4. Sea f en $S_{H,x,\lambda}$ tal que $f \neq P_Y g$. Entonces $f - P_Y g \in H_Y^\perp$, $P_Y g \in H_Y$,

$$f - P_Y g \perp P_Y g.$$

Por el teorema de Pitágoras,

$$\|f\|^2 = \|f - P_Y g\|^2 + \|P_Y g\|^2 > \|P_Y g\|^2.$$ □

En general, si buscamos una solución del problema de interpolación como una combinación lineal de ciertas funciones $\psi_1, \ldots, \psi_n$, entonces de manera natural surge la matriz

$$\big[\psi_r(x_s)\big]_{r,s=1}^n.$$

Por ejemplo, si $\psi_r(t) = t^{r-1}$, entonces es la matriz de Vandermonde.

En nuestra situación, el papel de las funciones $\psi_1, \ldots, \psi_n$ hacen $K_{x_1}, \ldots, K_{x_n}$. Por lo tanto, de manera natural surge la matriz de Gram asociada al núcleo K y los puntos $x_1, \ldots, x_n$:
$$M \coloneqq G_K(x_1, \ldots, x_n) \coloneqq \big[K_{x_s}(x_r)\big]_{r,s=1}^n = \big[K(x_r, x_s)\big]_{r,s=1}^n.$$
Vamos a relacionar el problema de interpolación con la matriz M.

7 Proposición. *Sea $\alpha \in \mathbb{C}^n$. Pongamos*
$$f \coloneqq \sum_{s=1}^n \alpha_s K_{x_s}.$$
Entonces para cada r en $\{1, \ldots, n\}$,
$$f(x_r) = (M\alpha)_r.$$

Demostración. Usamos la definición de f, luego la propiedad reproductora, y al final la definición del producto de una matriz por un vector:
$$f(x_r) = \sum_{s=1}^n \alpha_s K_{x_s}(x_r) = \sum_{s=1}^n K(x_r, x_s)\alpha_s = \sum_{s=1}^n M_{r,s}\alpha_s = (M\alpha)_s.$$ □

8 Proposición. *Sea $\alpha \in \ker(M)$. Entonces*
$$\sum_{s=1}^n \alpha_s K_{x_s} = 0_H.$$

Demostración. Denotemos $\sum_{s=1}^n \alpha_s K_{x_s}$ por f. Por la Proposición 7, $f(x_j) = 0$ para cada j en $\{1, \ldots, n\}$. Luego, por la Proposición 2, $f \in H_Y^\perp$. Por otro lado, por construcción, $f \in H_Y$. Como $H_Y \cap H_Y^\perp = \{0_H\}$, concluimos que $f = 0_H$. □

9 Teorema (interpolación en EHNR)**.** *Sea H un EHNR sobre X, sea K el NR de X, sean $x_1, \ldots, x_n \in X$ diferentes a pares, y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

(a) existe g en H tal que $g(x_j) = \lambda_j$ para cada j en $\{1, \ldots, n\}$;

(b) $\lambda \in \operatorname{im}(G_K(x_1, \ldots, x_n))$.

Demostración. Usemos la notación breve que introdujimos antes.

1. Supongamos que $g \in S_{H,x,\lambda}$. Pongamos $f := P_Y g$. Entonces, por el Corolario 4, $f \in S_{H,x,\lambda}$. Como $f \in H_Y$, encontramos β en $\mathbb{C}^n$ tal que

$$f = \sum_{s=1}^{n} \beta_s K_{x_s}.$$

Por la Proposición 7, la condición que f interpola (x, λ) implica que $M\beta = \lambda$.

2. Al revés, supongamos que $\lambda \in \mathrm{im}(M)$. Sea $\alpha \in \mathbb{C}^n$ tal que $M\alpha = \lambda$. Pongamos

$$f := \sum_{s=1}^{n} \alpha_s K_{x_s}.$$

Entonces, por la Proposición 7, $f(x_r) = (M\alpha)_r = \lambda_r$ para cada r en $\{1, \ldots, n\}$. □

10 Proposición. *Supongamos que se cumplen las condiciones del Teorema 9 y $\alpha \in \mathbb{C}^n$ tal que $M\alpha = \lambda$. Entonces*

$$f := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j K_{x_j}$$

es la única función de norma mínima que interpola (x, λ). Más aún,

$$\|f\|^2 = \langle \lambda, \alpha \rangle_{\mathbb{C}^n}.$$

Demostración. Nos falta demostrar solamente la fórmula para $\|f\|^2$. Usamos la propiedad reproductora y la Proposición 7:

$$\|f\|^2 = \left\langle f, \sum_{s=1}^{n} \alpha_s K_{x_s} \right\rangle = \sum_{s=1}^{n} \overline{\alpha_s} f(x_s) = \sum_{s=1}^{n} \overline{\alpha_s} \lambda_s = \langle \lambda, \alpha \rangle_{\mathbb{C}^n}.$$ □

11 Corolario. *Sea H un EHNR sobre X, sea K el NR de X y sean $x_1, \ldots, x_n \in X$ diferentes a pares. Supongamos que la matriz $M := G_K(x_1, \ldots, x_n)$ es invertible. Entonces para cualquier lista de números $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, la función*

$$h := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j K_{x_j},$$

con $\alpha := M^{-1}\lambda$, es la función de norma mínima que interpola (x, λ).