Espacios de Hilbert finito-dimensionales con núcleo reproductor

Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

5 de enero de 2023

Plan

Contenido

Objetivos

- Demostrar que cada espacio de Hilbert de funciones, si tiene dimensión finita, entonces tiene núcleo reproductor.
- Conocer la idea de espacios de Hilbert de polinomios en un intervalo con peso.

Prerrequisitos

- Espacios de Hilbert con núcleo reproductor.
- Bases ortonormales de espacios de Hilbert.
- Existencia de bases ortonormales en espacios de Hilbert de dimensión finita.

Plan

Proposición

Sea X un conjunto. Supongamos que:

- $H \leq \mathbb{C}^X$ (subespacio vectorial),
- H está dotado de un producto interno,
- H es de dimensión finita.

Entonces H es un EHNR.

Demostración: construcción de K

H es completo por ser un espacio normado complejo de dimensión finita.

Demostración: construcción de K

H es completo por ser un espacio normado complejo de dimensión finita.

Sea $n := \dim(H)$ y sea $(b_1, \ldots, b_n)$ una base ortonormal de H.

Demostración: construcción de K

H es completo por ser un espacio normado complejo de dimensión finita.

Sea $n := \dim(H)$ y sea $(b_1, \ldots, b_n)$ una base ortonormal de H.

Definimos $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$,

$$K(x,y) := \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\,\overline{b_j(y)} \qquad (x, y \in X).$$

Demostración: construcción de K

H es completo por ser un espacio normado complejo de dimensión finita.

Sea $n := \dim(H)$ y sea $(b_1, \ldots, b_n)$ una base ortonormal de H.

Definimos $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$,

$$K(x,y) := \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\,\overline{b_j(y)} \qquad (x, y \in X).$$

En otras palabras, para cada y en X,

$$K_y = \sum_{j=1}^{n} \overline{b_j(y)}\,b_j.$$

Demostración: construcción de K

H es completo por ser un espacio normado complejo de dimensión finita.

Sea $n := \dim(H)$ y sea $(b_1, \ldots, b_n)$ una base ortonormal de H.

Definimos $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$,

$$K(x,y) := \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\,\overline{b_j(y)} \qquad (x, y \in X).$$

En otras palabras, para cada y en X,

$$K_y = \sum_{j=1}^{n} \overline{b_j(y)}\, b_j.$$

$K_y \in$

Demostración: construcción de K

H es completo por ser un espacio normado complejo de dimensión finita.

Sea $n := \dim(H)$ y sea $(b_1, \ldots, b_n)$ una base ortonormal de H.

Definimos $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$,

$$K(x,y) := \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\,\overline{b_j(y)} \qquad (x, y \in X).$$

En otras palabras, para cada y en X,

$$K_y = \sum_{j=1}^{n} \overline{b_j(y)}\, b_j.$$

$K_y \in \operatorname{lin}(b_1, \ldots, b_n)$

Demostración: construcción de K

H es completo por ser un espacio normado complejo de dimensión finita.

Sea $n := \dim(H)$ y sea $(b_1, \ldots, b_n)$ una base ortonormal de H.

Definimos $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$,

$$K(x, y) := \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\,\overline{b_j(y)} \qquad (x, y \in X).$$

En otras palabras, para cada y en X,

$$K_y = \sum_{j=1}^{n} \overline{b_j(y)}\,b_j.$$

$K_y \in \operatorname{lin}(b_1, \ldots, b_n) =$

Demostración: construcción de K

H es completo por ser un espacio normado complejo de dimensión finita.

Sea $n := \dim(H)$ y sea $(b_1, \ldots, b_n)$ una base ortonormal de H.

Definimos $K \colon X^2 \to \mathbb{C}$,

$$K(x, y) := \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\, \overline{b_j(y)} \qquad (x, y \in X).$$

En otras palabras, para cada y en X,

$$K_y = \sum_{j=1}^{n} \overline{b_j(y)}\, b_j.$$

$K_y \in \operatorname{lin}(b_1, \ldots, b_n) = H$.

Demostración: la propiedad reproductora para los elementos de la base

Sean $q \in \{1, \ldots, n\}$, $y \in X$.

Demostración: la propiedad reproductora para los elementos de la base

Sean $q \in \{1, \ldots, n\}$, $y \in X$.

Aplicamos la definición de K, luego la suposición que $(b_j)_{j=1}^n$ es ortonormal:

$$\langle b_q, K_y \rangle$$

Demostración: la propiedad reproductora para los elementos de la base

Sean $q \in \{1, \ldots, n\}$, $y \in X$.

Aplicamos la definición de K, luego la suposición que $(b_j)_{j=1}^{n}$ es ortonormal:

$$\langle b_q, K_y \rangle =$$

Demostración: la propiedad reproductora para los elementos de la base

Sean $q \in \{1, \ldots, n\}$, $y \in X$.

Aplicamos la definición de K, luego la suposición que $(b_j)_{j=1}^n$ es ortonormal:

$$\langle b_q, K_y \rangle = \left\langle b_q, \sum_{j=1}^{n} \overline{b_j(y)}\, b_j \right\rangle$$

Demostración: la propiedad reproductora para los elementos de la base

Sean $q \in \{1, \ldots, n\}$, $y \in X$.

Aplicamos la definición de K, luego la suposición que $(b_j)_{j=1}^n$ es ortonormal:

$$\langle b_q, K_y \rangle = \left\langle b_q, \sum_{j=1}^{n} \overline{b_j(y)}\, b_j \right\rangle =$$

Demostración: la propiedad reproductora para los elementos de la base

Sean $q \in \{1, \ldots, n\}$, $y \in X$.

Aplicamos la definición de K, luego la suposición que $(b_j)_{j=1}^n$ es ortonormal:

$$\langle b_q, K_y \rangle = \left\langle b_q, \sum_{j=1}^n \overline{b_j(y)}\, b_j \right\rangle = \sum_{j=1}^n b_j(y) \, \langle b_q, b_j \rangle$$

Demostración: la propiedad reproductora para los elementos de la base

Sean $q \in \{1, \ldots, n\}$, $y \in X$.

Aplicamos la definición de K, luego la suposición que $(b_j)_{j=1}^n$ es ortonormal:

$$\langle b_q, K_y \rangle = \left\langle b_q, \sum_{j=1}^{n} \overline{b_j(y)}\, b_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} b_j(y) \langle b_q, b_j \rangle =$$

Demostración: la propiedad reproductora para los elementos de la base

Sean $q \in \{1, \ldots, n\}$, $y \in X$.

Aplicamos la definición de K, luego la suposición que $(b_j)_{j=1}^n$ es ortonormal:

$$\langle b_q, K_y \rangle = \left\langle b_q, \sum_{j=1}^n \overline{b_j(y)}\, b_j \right\rangle = \sum_{j=1}^n b_j(y) \langle b_q, b_j \rangle = \sum_{j=1}^n b_j(y)\, \delta_{q,j}$$

Demostración: la propiedad reproductora para los elementos de la base

Sean $q \in \{1, \ldots, n\}$, $y \in X$.

Aplicamos la definición de K, luego la suposición que $(b_j)_{j=1}^n$ es ortonormal:

$$\langle b_q, K_y \rangle = \left\langle b_q, \sum_{j=1}^{n} \overline{b_j(y)}\, b_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} b_j(y) \langle b_q, b_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} b_j(y)\, \delta_{q,j} =$$

Demostración: la propiedad reproductora para los elementos de la base

Sean $q \in \{1, \ldots, n\}$, $y \in X$.

Aplicamos la definición de K, luego la suposición que $(b_j)_{j=1}^n$ es ortonormal:

$$\langle b_q, K_y \rangle = \left\langle b_q, \sum_{j=1}^n \overline{b_j(y)}\, b_j \right\rangle = \sum_{j=1}^n b_j(y) \langle b_q, b_j \rangle = \sum_{j=1}^n b_j(y)\, \delta_{q,j} = b_q(y).$$

Demostración: la propiedad reproductora para los elementos de la base

Sean $q \in \{1, \ldots, n\}$, $y \in X$.

Aplicamos la definición de K, luego la suposición que $(b_j)_{j=1}^n$ es ortonormal:

$$\langle b_q, K_y \rangle = \left\langle b_q, \sum_{j=1}^n \overline{b_j(y)}\, b_j \right\rangle = \sum_{j=1}^n b_j(y)\, \langle b_q, b_j \rangle = \sum_{j=1}^n b_j(y)\, \delta_{q,j} = b_q(y).$$

Hemos mostrado que

$$\langle b_q, K_y \rangle = b_q(y) \qquad (q \in \{1, \ldots, n\},\ y \in X).$$

Demostración: la propiedad reproductora para todos los elementos de H

Sea $f \in H$.

Demostración: la propiedad reproductora para todos los elementos de H

Sea $f \in H$.

Descomponemos f en la base ortonormal:

$$f = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q b_q.$$

Aquí $\alpha_q = \langle f, b_q \rangle$, pero no nos importa.

Demostración: la propiedad reproductora para todos los elementos de H

Sea $f \in H$.

Descomponemos f en la base ortonormal:

$$f = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q b_q.$$

Aquí $\alpha_q = \langle f, b_q \rangle$, pero no nos importa.

Sea $y \in X$.

$$\langle f, K_y \rangle$$

Demostración: la propiedad reproductora para todos los elementos de H

Sea $f \in H$.

Descomponemos f en la base ortonormal:

$$f = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q b_q.$$

Aquí $\alpha_q = \langle f, b_q \rangle$, pero no nos importa.

Sea $y \in X$.

$$\langle f, K_y \rangle =$$

Demostración: la propiedad reproductora para todos los elementos de H

Sea $f \in H$.

Descomponemos f en la base ortonormal:

$$f = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q b_q.$$

Aquí $\alpha_q = \langle f, b_q \rangle$, pero no nos importa.

Sea $y \in X$.

$$\langle f, K_y \rangle = \left\langle \sum_{q=1}^{n} \alpha_q b_q,\ K_y \right\rangle$$

Demostración: la propiedad reproductora para todos los elementos de H

Sea $f \in H$.

Descomponemos f en la base ortonormal:

$$f = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q b_q.$$

Aquí $\alpha_q = \langle f, b_q \rangle$, pero no nos importa.

Sea $y \in X$.

$$\langle f, K_y \rangle = \left\langle \sum_{q=1}^{n} \alpha_q b_q,\ K_y \right\rangle =$$

Demostración: la propiedad reproductora para todos los elementos de H

Sea $f \in H$.

Descomponemos f en la base ortonormal:

$$f = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q b_q.$$

Aquí $\alpha_q = \langle f, b_q \rangle$, pero no nos importa.

Sea $y \in X$.

$$\langle f, K_y \rangle = \left\langle \sum_{q=1}^{n} \alpha_q b_q,\ K_y \right\rangle = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q \langle b_q, K_y \rangle$$

Demostración: la propiedad reproductora para todos los elementos de H

Sea $f \in H$.

Descomponemos f en la base ortonormal:

$$f = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q b_q.$$

Aquí $\alpha_q = \langle f, b_q \rangle$, pero no nos importa.

Sea $y \in X$.

$$\langle f, K_y \rangle = \left\langle \sum_{q=1}^{n} \alpha_q b_q,\ K_y \right\rangle = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q \langle b_q, K_y \rangle =$$

Demostración: la propiedad reproductora para todos los elementos de H

Sea $f \in H$.

Descomponemos f en la base ortonormal:

$$f = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q b_q.$$

Aquí $\alpha_q = \langle f, b_q \rangle$, pero no nos importa.

Sea $y \in X$.

$$\langle f, K_y \rangle = \left\langle \sum_{q=1}^{n} \alpha_q b_q,\ K_y \right\rangle = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q \langle b_q, K_y \rangle = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q b_q(y)$$

Demostración: la propiedad reproductora para todos los elementos de H

Sea $f \in H$.

Descomponemos f en la base ortonormal:

$$f = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q b_q.$$

Aquí $\alpha_q = \langle f, b_q \rangle$, pero no nos importa.

Sea $y \in X$.

$$\langle f, K_y \rangle = \left\langle \sum_{q=1}^{n} \alpha_q b_q,\, K_y \right\rangle = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q \langle b_q, K_y \rangle = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q b_q(y) =$$

Demostración: la propiedad reproductora para todos los elementos de H

Sea $f \in H$.

Descomponemos f en la base ortonormal:

$$f = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q b_q.$$

Aquí $\alpha_q = \langle f, b_q \rangle$, pero no nos importa.

Sea $y \in X$.

$$\langle f, K_y \rangle = \left\langle \sum_{q=1}^{n} \alpha_q b_q,\ K_y \right\rangle = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q \langle b_q, K_y \rangle = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q b_q(y) = f(y).$$

Demostración: la propiedad reproductora para todos los elementos de H

Sea $f \in H$.

Descomponemos f en la base ortonormal:

$$f = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q b_q.$$

Aquí $\alpha_q = \langle f, b_q \rangle$, pero no nos importa.

Sea $y \in X$.

$$\langle f, K_y \rangle = \left\langle \sum_{q=1}^{n} \alpha_q b_q,\ K_y \right\rangle = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q \langle b_q, K_y \rangle = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q b_q(y) = f(y).$$

Hemos demostrado que K tiene la propiedad reproductora.

Plan

El espacio vectorial de polinomios de grado $\leq n$

Sea X un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, no vacío.

El espacio vectorial de polinomios de grado $\leq n$

Sea X un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, no vacío.

Sea $n \in \mathbb{N}_0$.

El espacio vectorial de polinomios de grado $\le n$

Sea X un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, no vacío.

Sea $n \in \mathbb{N}_0$.

Consideramos

$$\mathcal{P}_n(X) := \left\{ f \in \mathbb{C}^X \colon \quad \exists \alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C} \quad \forall t \in X \quad f(t) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j \right\}.$$

El espacio vectorial de polinomios de grado $\leq n$

Sea X un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, no vacío.

Sea $n \in \mathbb{N}_0$.

Consideramos

$$\mathcal{P}_n(X) := \left\{ f \in \mathbb{C}^X : \quad \exists \alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C} \quad \forall t \in X \quad f(t) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j \right\}.$$

Sabemos que $\mathcal{P}_n(X)$ es un espacio vectorial.

El espacio vectorial de polinomios de grado $\leq n$

Sea X un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, no vacío.

Sea $n \in \mathbb{N}_0$.

Consideramos

$$\mathcal{P}_n(X) := \left\{ f \in \mathbb{C}^X \colon \quad \exists \alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C} \quad \forall t \in X \quad f(t) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j \right\}.$$

Sabemos que $\mathcal{P}_n(X)$ es un espacio vectorial.

Sus elementos son funciones polinomiales de grado $\leq n$.

El producto interno asociado a una función de peso

Sea $\omega \in C^\infty(X, (0, +\infty))$.

El producto interno asociado a una función de peso

Sea $\omega \in C^\infty(X, (0, +\infty))$.

En otras palabras, ω es una función definida en X, con valores estrictamente positivos, e infinitamente suave.

El producto interno asociado a una función de peso

Sea $\omega \in C^{\infty}(X, (0, +\infty))$.

En otras palabras, ω es una función definida en X, con valores estrictamente positivos, e infinitamente suave.

Supongamos que

$$\forall m \in \mathbb{N}_0 \qquad \int_X |t|^m \omega(t) \, \mathrm{d}\mu(t) t < +\infty,$$

donde μ es la medida de Lebesgue.

El producto interno asociado a una función de peso

Sea $\omega \in C^\infty(X, (0, +\infty))$.

En otras palabras, ω es una función definida en X, con valores estrictamente positivos, e infinitamente suave.

Supongamos que

$$\forall m \in \mathbb{N}_0 \qquad \int_X |t|^m \omega(t) \, \mathrm{d}\mu(t) t < +\infty,$$

donde μ es la medida de Lebesgue.

Definimos en $\mathcal{P}_n(X)$ el producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_X f \, \overline{g} \, \omega \, \mathrm{d}\mu.$$

$\mathcal{P}_n(X, \omega) :=$ el espacio vectorial $\mathcal{P}_n(X)$ dotado de este producto interno.

El núcleo reproductor en $\mathcal{P}_n(X, \omega)$

Sabemos que $\dim(\mathcal{P}_n(X, \omega)) = n + 1$.

El núcleo reproductor en $\mathcal{P}_n(X,\omega)$

Sabemos que $\dim(\mathcal{P}_n(X,\omega)) = n+1$.

Por la proposición que hemos demostrado en este tema, $\mathcal{P}_n(X,\omega)$ es un EHNR.

El núcleo reproductor en $\mathcal{P}_n(X, \omega)$

Sabemos que $\dim(\mathcal{P}_n(X, \omega)) = n + 1$.

Por la proposición que hemos demostrado en este tema, $\mathcal{P}_n(X, \omega)$ es un EHNR.

Hay fórmulas ("de tipo Rodrigues") para construir una base ortogonal en $\mathcal{P}_n(X, \omega)$.

El núcleo reproductor en $\mathcal{P}_n(X, \omega)$

Sabemos que $\dim(\mathcal{P}_n(X, \omega)) = n + 1$.

Por la proposición que hemos demostrado en este tema, $\mathcal{P}_n(X, \omega)$ es un EHNR.

Hay fórmulas ("de tipo Rodrigues") para construir una base ortogonal en $\mathcal{P}_n(X, \omega)$.

La fórmula de Christoffel–Darboux permite calcular el núcleo reproductor de $\mathcal{P}_n(X, \omega)$.