Criterio para que una función sea elemento del EHNR

Objetivos. Dado un EHNR H, obtener una descripción de los elementos de H.

Prerrequisitos. Interpolación en EHNR, convergencia de redes, descripción de la imagen de una matriz positiva.

En este tema suponemos que X es un conjunto y $H \leq \mathbb{C}^X$ es un EHNR. Denotamos por K el núcleo reproductor de H.

Para cada $Y \subseteq X$, denotamos por H_Y el subespacio cerrado generado por

$$\{K_y : \ y \in Y\}.$$

Denotamos por P_Y la proyección ortogonal sobre H_Y.

1 Definición. Denotamos por $\mathcal{F}_X$ al conjunto de los subconjuntos finitos de X. Consideramos $\mathcal{F}_X$ como un conjunto parcialmente ordenado, con la relación $\subseteq$.

2 Observación. Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_X$, entonces

$$F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}_X, \qquad F_1 \subseteq F_1 \cup F_2, \qquad F_2 \subseteq F_1 \cup F_2.$$

Por lo tanto, $\mathcal{F}_X$ es un conjunto dirigido.

3 Proposición (aproximación de elementos de EHNR por redes, repaso)**.** *Sea $g \in H$. Entonces la red $(P_Y g)_{Y \in \mathcal{F}_X}$ converge a g.*

4 Teorema (criterio de que el problema de interpolación tiene solución en EHNR, repaso)**.** *Sean $m \in X$, $x_1, \ldots, x_m$ puntos diferentes a pares, $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{C}$. Denotamos $\{x_1, \ldots, x_m\}$ por Y. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) existe f en H tal que f interpola (x, v);

(b) $v \in \operatorname{im}(G_K(x))$;

(c) existe $\alpha \in \mathbb{C}^m$ tal que la función $g := \sum_{j=1}^m \alpha_j K_{x_j}$ interpola (x, v).

Más aún, si se cumplen las condiciones (a), (b), (c) y $v = G_K(x)u$, entonces

$$\langle v, u\rangle = \|g\|^2 \le \|f\|^2.$$

5 Proposición (criterio de pertenencia a la imagen de una matriz positiva, repaso)**.** *Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A \ge 0$ y sea $v \in \mathbb{C}^n$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $v \in \operatorname{im}(A)$,

(b) existe $c \ge 0$ tal que $vv^* \le c\,A$.

Más aún, si $u \in \mathbb{C}^n$ y $v = Au$, entonces

$$0 \le \langle v, u\rangle = \min\big\{c \in \mathbb{R}\colon\ vv^* \le c\,A\big\}.$$

6 Teorema (descripción de las funciones pertenecientes al EHNR)**.** *Sean X un conjunto, H un EHNR sobre X, K el núcleo reproductor de H, $f \in \mathbb{C}^X$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $f \in H$;

(b) existe $c \ge 0$ tal que $(x, y) \mapsto c^2\, K(x, y) - f(x)\overline{f(y)}$ es un núcleo;

(c) existe $c \ge 0$ tal que para cada m en $\mathbb{N}$ y cada $x_1, \ldots, x_m$ en X, existe $g \in H$ tal que $\|g\| \le c$ y $f(x_j) = g(x_j)$ para cada j en $\{1, \ldots, m\}$.

Demostración. (a)⇒(b). Pongamos $c \coloneqq \|f\|$. Definimos $L\colon X^2 \to \mathbb{C}$,

$$L(x, y) \coloneqq c^2\, K(x, y) - f(x)\overline{f(y)}.$$

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$. Queremos mostrar que $G_L(x) \ge 0$. Para cada j en $\{1, \ldots, m\}$ pongamos

$$v_j \coloneqq f(x_j).$$

Calculemos las componentes de $G_L(x)$:

$$\begin{aligned} G_L(x)_{r,s} &= L(x_r, x_s) = c^2 K(x_r, x_s) - f(x_r)\overline{f(x_s)} \\ &= c^2 K(x_r, x_s) - v_r\overline{v_s} = (c^2 G_K(x) - vv^*)_{r,s}. \end{aligned}$$

Hemos mostrado que

$$G_L(x) = c^2 G_K(x) - vv^*.$$

Como la función f interpola (x, v), por el Teorema 4 concluimos que $v \in \operatorname{im}(G_K(x))$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = G_K(x)u$. Entonces

$$\langle v, u\rangle \le \|f\|^2 = c^2.$$

Por la Proposición 5,

$$v\,v^* \le \langle v, u\rangle\, G_K(x) \le c^2\, G_K(x).$$

En otras palabras, $G_L(x) = c^2 G_K(x) - vv^* \ge 0$.

(b)⇒(c). Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m$. La condición (b) significa que

$$\left[c^2\, K(x_r, x_s) - f(x_r)\, \overline{f(x_s)}\right] \ge 0.$$

Pongamos $v \coloneqq \big[f(x_r)\big]_{r=1}^m$. Por la Proposición 5, $v \in \operatorname{im}(G_K(x))$. Por el Teorema 4, existe $\alpha \in \mathbb{C}^n$ tal que la función

$$g \coloneqq \sum_{j=1}^m \alpha_j K_{x_j}$$

interpola (x, v). Luego

$$\|g\|^2 = \langle v, \alpha\rangle \le c^2.$$

(c)⇒(a). Supongamos que se cumple la condición (c). Por la suposición, para cada F en $\mathcal{F}_X$ existe h_F en H tal que $\|h_F\| \le c$ y $h_F(x) = f(x)$ para cada x en F. Sea $g_F \coloneqq P_F(h_F)$. Entonces $g_F(x) = h_F(x) = f(x)$ para cada x en F y $\|g_F\| \le \|h_F\| \le c$.

Vamos a mostrar que la red $(g_F)_{F\in\mathcal{F}_X}$ es de Cauchy y converge a la función f. Sea

$$M \coloneqq \sup_{F\in\mathcal{F}_X} \|g_F\|.$$

Sabemos que $M \le c < +\infty$. Sea $\varepsilon > 0$. Encontramos F_0 en $\mathcal{F}_X$ tal que $\|g_{F_0}\| \ge M - \varepsilon^2$. Para cada F en $\mathcal{F}_X$ con $F_0 \subseteq F$, tenemos que $P_{F_0}(g_F) = g_{F_0}$. Por eso

$$\langle g_F - g_{F_0}, g_{F_0}\rangle = 0.$$

Luego, por la identidad de Pitágoras,

$$\|g_F\|^2 = \|g_F - g_{F_0}\|^2 + \|g_{F_0}\|^2 \ge \|g_{F_0}\|^2,$$

así que

$$M - \varepsilon^2 \le \|g_{F_0}\| \le \|g_F\| \le M$$

y

$$\|g_F\| - \|g_{F_0}\| \le \varepsilon^2.$$

Por lo tanto,

$$\|g_F - g_{F_0}\|^2 = \|g_F\|^2 - \|g_{F_0}\|^2 = \big(\|g_F\| + \|g_{F_0}\|\big)\big(\|g_F\| - \|g_{F_0}\|\big) \le 2M\varepsilon$$

y $\|g_F - g_{F_0}\| \le \sqrt{2M\varepsilon}$.

Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_X$ y $F_0 \subseteq F_1$, $F_0 \subseteq F_2$, entonces

$$\|g_{F_1} - g_{F_2}\| \le \|g_{F_1} - g_{F_0}\| + \|g_{F_2} - g_{F_0}\| \le 2\sqrt{2M\varepsilon}.$$

Como ε es arbitrario, hemos mostrado que la red $(g_F)_{F\in\mathcal{F}_X}$ es de Cauchy.

El espacio H es completo, por eso existe una función $u \in H$ que es el límite de esta red. Sabemos que la convergencia en H implica la convergencia puntual, así que para cada x en X tenemos que

$$\lim_{F\in\mathcal{F}_X} g_F(x) = u(x).$$

Por otro lado, dado t en X, para cada F en $\mathcal{F}_X$ con $\{t\} \subseteq F$ tenemos que $g_F(t) = f(t)$. Por lo tanto,

$$\lim_{F\in\mathcal{F}_X} g_F(t) = f(t).$$

Hemos demostrado que $u = f$. Luego $f \in H$. Notemos que $f = \lim_{F\in\mathcal{F}_X} g_F$. Como la norma en H es una función continua, $\|f\| \le c$. $\square$

7 Observación. Podemos demostrar de manera directa que en el Teorema 6 la condición (a) implica la condición (b) con $c = \|f\|$. Supongamos que $f \in H$. Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$,

$$g \coloneqq \sum_{j=1}^m \alpha_j K_{x_j}.$$

Entonces

$$\langle f, g\rangle = \left\langle f, \sum_{j=1}^m \alpha_j K_{x_j} \right\rangle = \sum_{j=1}^m \overline{\alpha_j}\, f(x_j)$$

y

$$\|g\|^2 = \left\langle \sum_{s=1}^m \alpha_s\, K_{x_s}, \sum_{r=1}^m \alpha_r\, K_{x_r} \right\rangle = \sum_{r,s=1}^m \overline{\alpha_r}\alpha_s K_{x_s}(x_r) = \sum_{r,s=1}^m \overline{\alpha_r}\alpha_s K(x_r, x_s).$$

Luego

$$\sum_{r,s=1}^m \overline{\alpha_r}\, \alpha_s f(x_r)\, \overline{f(x_s)} = \left|\sum_{r=1}^m \overline{\alpha_r}\, K_{x_r}\right|^2 = \left|\langle f, g\rangle\right|^2 \le \|f\|^2\, \|g\|^2 = \|f\|^2 \sum_{r,s=1}^m \overline{\alpha_r}\alpha_s K(x_r, x_s).$$

Hemos mostrado que

$$\sum_{r,s=1}^m \overline{\alpha_r}\, \alpha_s \left(\|f\|^2\, K(x_r, x_s) - f(x_r)\overline{f(x_s)}\right) \ge 0.$$

8 Proposición. *En las condiciones del Teorema 6, si* $f \in H$*, entonces* $\|f\|$ *es el mínimo número* c *que satisface las desigualdades en (b) y (c).*

Demostración. Si $f \in H$, entonces la condición (b) se cumple con $c = \|f\|$. También hemos mostrado que si c satisface (b), entonces c satisface (c). Finalmente, hemos mostrado que si se cumple (c), entonces $\|f\| \leq c$. Concluimos que $\|f\|$ es el mínimo valor de c para que se cumplan (b) y (c). $\square$