Aproximación por redes de elementos de un espacio de Hilbert con núcleo reproductor

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

3 de febrero de 2023

Plan

1. Introducción
2. Repaso de herramientas
3. Aproximación de elementos de EHNR por redes

Objetivo

Mostrar que los elementos de EHNR se pueden aproximar por redes,
donde cada elemento de la red es una combinación lineal finita de los núcleos.

Prerrequisitos

- Interpolación en EHNR.
- Convergencia de redes.
- Proyección ortogonal.
- $\mathrm{lin}(\{K_y : \ y \in X\})$ es denso en el EHNR.

Plan

Los subconjuntos finitos de X forman un conjunto dirigido

Sea X un conjunto.

Los subconjuntos finitos de X forman un conjunto dirigido

Sea X un conjunto.

$\mathcal{F}_X :=$ el conjunto de los subconjuntos finitos de X.

Los subconjuntos finitos de X forman un conjunto dirigido

Sea X un conjunto.

$\mathcal{F}_X :=$ el conjunto de los subconjuntos finitos de X.

Consideramos $\mathcal{F}_X$ con el orden parcial $\subseteq$.

Los subconjuntos finitos de X forman un conjunto dirigido

Sea X un conjunto.

$\mathcal{F}_X :=$ el conjunto de los subconjuntos finitos de X.

Consideramos $\mathcal{F}_X$ con el orden parcial $\subseteq$.

Proposición

$\mathcal{F}_X$ es un conjunto dirigido.

Los subconjuntos finitos de X forman un conjunto dirigido

Sea X un conjunto.

$\mathcal{F}_X :=$ el conjunto de los subconjuntos finitos de X.

Consideramos $\mathcal{F}_X$ con el orden parcial $\subseteq$.

Proposición

$\mathcal{F}_X$ es un conjunto dirigido.

Demostración. Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_X$, entonces

$$F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}_X, \qquad F_1 \subseteq F_1 \cup F_2, \qquad F_2 \subseteq F_1 \cup F_2.$$

Subespacios H_Y, donde $Y \in \mathcal{F}_X$

En este tema suponemos que X es un conjunto y $H \leq \mathbb{C}^X$ es un EHNR.

Subespacios H_Y, donde $Y \in \mathcal{F}_X$

En este tema suponemos que X es un conjunto y $H \leq \mathbb{C}^X$ es un EHNR.

Denotamos por K el núcleo reproductor de H.

Subespacios H_Y, donde $Y \in \mathcal{F}_X$

En este tema suponemos que X es un conjunto y $H \leq \mathbb{C}^X$ es un EHNR.

Denotamos por K el núcleo reproductor de H.

Para cada Y en $\mathcal{F}_X$,

$$H_Y \ := \ \operatorname{lin}\Big(\{K_y \colon \ y \in Y\}\Big).$$

Subespacios H_Y, donde $Y \in \mathcal{F}_X$

En este tema suponemos que X es un conjunto y $H \leq \mathbb{C}^X$ es un EHNR.

Denotamos por K el núcleo reproductor de H.

Para cada Y en $\mathcal{F}_X$,

$$H_Y \ := \ \operatorname{lin}\Big(\{K_y\colon\ y \in Y\}\Big).$$

H_Y es de dimensión finita, por eso es cerrado.

Subespacios H_Y, donde $Y \in \mathcal{F}_X$

En este tema suponemos que X es un conjunto y $H \le \mathbb{C}^X$ es un EHNR.

Denotamos por K el núcleo reproductor de H.

Para cada Y en $\mathcal{F}_X$,

$$H_Y \;:=\; \operatorname{lin}\Big(\{K_y\colon\; y \in Y\}\Big).$$

H_Y es de dimensión finita, por eso es cerrado.

$P_Y :=$ la proyección ortogonal sobre H_Y.

$P_Y f$ para $f \in H$, $Y \in \mathcal{F}_X$

Si $Y \in \mathcal{F}_X$, $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$, $f \in H$, entonces

$$P_Y f \in \operatorname{lin}(K_{y_1}, \ldots, K_{y_m}).$$

$P_Y f$ para $f \in H$, $Y \in \mathcal{F}_X$

Si $Y \in \mathcal{F}_X$, $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$, $f \in H$, entonces

$$P_Y f \in \mathrm{lin}\big(K_{y_1}, \ldots, K_{y_m}\big).$$

Más aún, $P_Y f$ es el elemento de $\mathrm{lin}\big(K_{y_1}, \ldots, K_{y_m}\big)$ más cercano a f.

Repaso: $\operatorname{lin}(\{K_y :\ y \in X\})$ es denso en H

$W := \operatorname{lin}(\{K_y :\ y \in X\})$.

Repaso: $\mathrm{lin}(\{K_y : \ y \in X\})$ es denso en H

$W := \mathrm{lin}(\{K_y : \ y \in X\})$.

Proposición

$\mathrm{clos}(W) = H$.

Repaso: $\operatorname{lin}(\{K_y\colon\ y \in X\})$ es denso en H

$W := \operatorname{lin}(\{K_y\colon\ y \in X\})$.

Proposición

$\operatorname{clos}(W) = H$.

Demostración. Si $f \in \operatorname{clos}(W)^\perp$, entonces

Repaso: $\operatorname{lin}(\{K_y :\ y \in X\})$ es denso en H

$W := \operatorname{lin}(\{K_y :\ y \in X\})$.

Proposición

$\operatorname{clos}(W) = H$.

Demostración. Si $f \in \operatorname{clos}(W)^\perp$, entonces

$$\forall y \in Y \qquad f(y)$$

Repaso: $\operatorname{lin}(\{K_y:\ y \in X\})$ es denso en H

$W := \operatorname{lin}(\{K_y:\ y \in X\})$.

Proposición

$\operatorname{clos}(W) = H$.

Demostración. Si $f \in \operatorname{clos}(W)^\perp$, entonces

$$\forall y \in Y \qquad f(y) =$$

Repaso: $\mathrm{lin}(\{K_y : \ y \in X\})$ es denso en H

$W := \mathrm{lin}(\{K_y : \ y \in X\})$.

Proposición

$\mathrm{clos}(W) = H$.

Demostración. Si $f \in \mathrm{clos}(W)^{\perp}$, entonces

$$\forall y \in Y \qquad f(y) = \langle f, K_y \rangle$$

Repaso: $\mathrm{lin}(\{K_y : \ y \in X\})$ es denso en H

$W := \mathrm{lin}(\{K_y : \ y \in X\})$.

Proposición

$\mathrm{clos}(W) = H$.

Demostración. Si $f \in \mathrm{clos}(W)^\perp$, entonces

$$\forall y \in Y \qquad f(y) = \langle f, K_y \rangle =$$

Repaso: $\operatorname{lin}(\{K_y :\ y \in X\})$ es denso en H

$W := \operatorname{lin}(\{K_y :\ y \in X\})$.

Proposición

$\operatorname{clos}(W) = H$.

Demostración. Si $f \in \operatorname{clos}(W)^\perp$, entonces

$$\forall y \in Y \qquad f(y) = \langle f, K_y \rangle = 0.$$

Repaso: $\operatorname{lin}(\{K_y : \ y \in X\})$ es denso en H

$W := \operatorname{lin}(\{K_y : \ y \in X\})$.

Proposición

$\operatorname{clos}(W) = H$.

Demostración. Si $f \in \operatorname{clos}(W)^\perp$, entonces

$$\forall y \in Y \qquad f(y) = \langle f, K_y \rangle = 0.$$

Hemos mostrado que $\quad \operatorname{clos}(W)^\perp$

Repaso: $\text{lin}(\{K_y : \ y \in X\})$ es denso en H

$W := \text{lin}(\{K_y : \ y \in X\})$.

Proposición

$\text{clos}(W) = H$.

Demostración. Si $f \in \text{clos}(W)^\perp$, entonces

$$\forall y \in Y \qquad f(y) = \langle f, K_y \rangle = 0.$$

Hemos mostrado que $\quad \text{clos}(W)^\perp =$

Repaso: $\mathrm{lin}(\{K_y : \; y \in X\})$ es denso en H

$W := \mathrm{lin}(\{K_y : \; y \in X\})$.

Proposición

$\mathrm{clos}(W) = H$.

Demostración. Si $f \in \mathrm{clos}(W)^\perp$, entonces

$$\forall y \in Y \qquad f(y) = \langle f, K_y \rangle = 0.$$

Hemos mostrado que $\quad \mathrm{clos}(W)^\perp = \{0_H\}$.

Repaso: $\mathrm{lin}(\{K_y:\ y \in X\})$ es denso en H

$W := \mathrm{lin}(\{K_y:\ y \in X\})$.

Proposición

$\mathrm{clos}(W) = H$.

Demostración. Si $f \in \mathrm{clos}(W)^\perp$, entonces

$$\forall y \in Y \qquad f(y) = \langle f, K_y \rangle = 0.$$

Hemos mostrado que $\quad \mathrm{clos}(W)^\perp = \{0_H\}$. $\quad$ Luego

$$\mathrm{clos}(W)$$

Repaso: $\operatorname{lin}(\{K_y\colon\ y \in X\})$ es denso en H

$W := \operatorname{lin}(\{K_y\colon\ y \in X\})$.

Proposición

$\operatorname{clos}(W) = H$.

Demostración. Si $f \in \operatorname{clos}(W)^\perp$, entonces

$$\forall y \in Y \qquad f(y) = \langle f, K_y \rangle = 0.$$

Hemos mostrado que $\quad \operatorname{clos}(W)^\perp = \{0_H\}$. $\quad$ Luego

$$\operatorname{clos}(W) =$$

Repaso: $\mathrm{lin}(\{K_y : \ y \in X\})$ es denso en H

$W := \mathrm{lin}(\{K_y : \ y \in X\})$.

Proposición

$\mathrm{clos}(W) = H$.

Demostración. Si $f \in \mathrm{clos}(W)^\perp$, entonces

$$\forall y \in Y \qquad f(y) = \langle f, K_y \rangle = 0.$$

Hemos mostrado que $\quad \mathrm{clos}(W)^\perp = \{0_H\}$. $\quad$ Luego

$$\mathrm{clos}(W) = (\mathrm{clos}(W)^\perp)^\perp$$

Repaso: $\mathrm{lin}(\{K_y : \ y \in X\})$ es denso en H

$W := \mathrm{lin}(\{K_y : \ y \in X\})$.

Proposición

$\mathrm{clos}(W) = H$.

Demostración. Si $f \in \mathrm{clos}(W)^\perp$, entonces

$$\forall y \in Y \qquad f(y) = \langle f, K_y \rangle = 0.$$

Hemos mostrado que $\quad \mathrm{clos}(W)^\perp = \{0_H\}$. $\quad$ Luego

$$\mathrm{clos}(W) = (\mathrm{clos}(W)^\perp)^\perp =$$

Repaso: $\operatorname{lin}(\{K_y : \ y \in X\})$ es denso en H

$W := \operatorname{lin}(\{K_y : \ y \in X\})$.

Proposición

$\operatorname{clos}(W) = H$.

Demostración. Si $f \in \operatorname{clos}(W)^\perp$, entonces

$$\forall y \in Y \qquad f(y) = \langle f, K_y \rangle = 0.$$

Hemos mostrado que $\quad \operatorname{clos}(W)^\perp = \{0_H\}. \quad$ Luego

$$\operatorname{clos}(W) = (\operatorname{clos}(W)^\perp)^\perp = \{0_H\}^\perp$$

Repaso: $\mathrm{lin}(\{K_y : \ y \in X\})$ es denso en H

$W := \mathrm{lin}(\{K_y : \ y \in X\})$.

Proposición

$\mathrm{clos}(W) = H$.

Demostración. Si $f \in \mathrm{clos}(W)^\perp$, entonces

$$\forall y \in Y \qquad f(y) = \langle f, K_y \rangle = 0.$$

Hemos mostrado que $\quad \mathrm{clos}(W)^\perp = \{0_H\}. \quad$ Luego

$$\mathrm{clos}(W) = (\mathrm{clos}(W)^\perp)^\perp = \{0_H\}^\perp =$$

Repaso: $\mathrm{lin}(\{K_y : \ y \in X\})$ es denso en H

$W := \mathrm{lin}(\{K_y : \ y \in X\})$.

Proposición

$\mathrm{clos}(W) = H$.

Demostración. Si $f \in \mathrm{clos}(W)^{\perp}$, entonces

$$\forall y \in Y \qquad f(y) = \langle f, K_y \rangle = 0.$$

Hemos mostrado que $\quad \mathrm{clos}(W)^{\perp} = \{0_H\}. \quad$ Luego

$$\mathrm{clos}(W) = (\mathrm{clos}(W)^{\perp})^{\perp} = \{0_H\}^{\perp} = H.$$

Plan

Aproximación de elementos de EHNR por redes

Proposición

Sea $f \in H$. Entonces la red $(P_Y f)_{Y \in \mathcal{F}_X}$ converge a f.

Aproximación de elementos de EHNR por redes

Proposición

Sea $f \in H$. Entonces la red $(P_Y f)_{Y \in \mathcal{F}_X}$ converge a f.

En otras palabras, estamos afirmando que

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists Z \in \mathcal{F}_X \qquad \forall Y \in \mathcal{F}_X \qquad \Big(Z \subseteq Y \qquad \Longrightarrow \qquad \|P_Y f - f\| < \varepsilon \Big).$$

Demostración, inicio

Sea $\varepsilon > 0$.

Demostración, inicio

Sea $\varepsilon > 0$.

Sabemos que

$$\operatorname{clos}\Big(\operatorname{lin}\Big(\{K_y \colon\ y \in X\}\Big)\Big) = H.$$

Demostración, inicio

Sea $\varepsilon > 0$.

Sabemos que

$$\operatorname{clos}\Big(\operatorname{lin}\Big(\{K_y\colon\ y \in X\}\Big)\Big) = H.$$

Encontramos $m \in \mathbb{N}$, $y_1, \ldots, y_m \in X$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ tales que

$$\left\| g - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{y_j} \right\| < \varepsilon.$$

Demostración, inicio

Sea $\varepsilon > 0$.

Sabemos que

$$\operatorname{clos}\Big(\operatorname{lin}\Big(\{K_y\colon\ y \in X\}\Big)\Big) = H.$$

Encontramos $m \in \mathbb{N}$, $y_1, \ldots, y_m \in X$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ tales que

$$\left\| g - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{y_j} \right\| < \varepsilon.$$

Pongamos

$$Z := \{y_1, \ldots, y_m\}.$$

Demostración, final

Como $P_Z f$ es el elemento de H_Z más cercano a f,

$$\|f - P_Z f\| \leq \left\| f - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{y_j} \right\| < \varepsilon.$$

Demostración, final

Como $P_Z f$ es el elemento de H_Z más cercano a f,

$$\|f - P_Z f\| \leq \left\| f - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{y_j} \right\| < \varepsilon.$$

Sea $Y \in \mathcal{F}_X$ tal que $Z \subseteq Y$.

Demostración, final

Como $P_Z f$ es el elemento de H_Z más cercano a f,

$$\|f - P_Z f\| \leq \left\| f - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{y_j} \right\| < \varepsilon.$$

Sea $Y \in \mathcal{F}_X$ tal que $Z \subseteq Y$. Entonces

$$P_Z f \in H_Z \subseteq H_Y.$$

Demostración, final

Como $P_Z f$ es el elemento de H_Z más cercano a f,

$$\|f - P_Z f\| \leq \left\| f - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{y_j} \right\| < \varepsilon.$$

Sea $Y \in \mathcal{F}_X$ tal que $Z \subseteq Y$. Entonces

$$P_Z f \in H_Z \subseteq H_Y.$$

Como $P_Y g$ es el elemento de H_Y más cercano a f, obtenemos

$$\|f - P_Y f\| \leq \|f - P_Z f\| < \varepsilon.$$