El EHNR inducido por el producto interno

1 Proposición. *Sea V un espacio de Hilbert. Definimos $K\colon V^2 \to \mathbb{C}$,*

$$K(x, y) \coloneqq \langle x, y\rangle_V.$$

Entonces K es un núcleo, y el EHNR correspondiente es el espacio dual V^*.

Demostración. 1. Mostremos que K es un núcleo. Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in V$. Entonces

$$G_K(x_1, \ldots, x_m) = \Bigl[\langle x_r, x_s\rangle\Bigr]_{r,s=1}^{m}.$$

Es la matriz de Gram de la lista de vectores $x_1, \ldots, x_m$. Por lo tanto, $G_K(x_1, \ldots, x_m) \geq 0$.

2. Definimos $\Phi\colon V \to V^*$,

$$\Phi(y)(x) \coloneqq \langle x, y\rangle.$$

Por el teorema de Riesz–Fréchet, Φ es un isomorfismo conjugado isométrico de espacios normados.

3. Mostremos de manera directa que V^* es un espacio de Hilbert. Definimos

$$\langle f, g\rangle_{V^*} \coloneqq \langle \Phi^{-1}(g), \Phi^{-1}(f)\rangle_V.$$

Es fácil ver que $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V^*}$ es un producto interno. Más aún,

$$\sqrt{\langle \Phi(x), \Phi(x)\rangle_{V^*}} = \sqrt{\langle x, x\rangle_V} = \|x\|_V = \|\Phi(x)\|_{V^*}.$$

En otras palabras, la norma inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V^*}$ coincide con la norma usual en V^*. Sabemos que V^* es completo respecto a esta norma.

4. Mostremos de manera directa que K es el núcleo reproductor de V^*. Sea $f \in V^*$. Pongamos $y \coloneqq \Phi^{-1}(f)$. Entonces para cada x en V tenemos

$$f(x) = \Phi(y)(x) = \langle x, y\rangle_V = K(x, y) = K_y(x).$$

Concluimos que $f = K_y$ y que se cumple la propiedad reproductora. □

2 Ejercicio. Sea V un espacio de Hilbert. Definimos $K\colon V^2 \to \mathbb{C}$,

$$K(x, y) \coloneqq \langle y, x\rangle_V.$$

Mostrar que K es un núcleo. Denotemos el EHNR correspondiente por H_K. Mostrar que la función $\Psi\colon V \to H_K$,

$$V(y) \coloneqq K_y,$$

es un isomorfismo isométrico de espacios de Hilbert.