El espacio de Hilbert con núcleo reproductor inducido por una matriz estrictamente positiva

Objetivos. Dada una matriz estrictamente positiva P de orden n, estudiamos el espacio de Hilbert sobre el dominio $\{1, \ldots, n\}$ con núcleo $K(r, s) \coloneqq P_{r,s}$.

Prerrequisitos. Matrices estrictamente positivas, espacios de Hilbert con núcleo reproductor, el teorema de Moore–Aronszajn.

En este tema suponemos que $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $P > 0$, esto es,

$$\forall \xi \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\} \qquad \langle P\xi, \xi \rangle > 0.$$

Pongamos $X \coloneqq \{1, \ldots, n\}$. Identificamos $\mathbb{C}^X$ con $\mathbb{C}^n$. Definimos $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$K(r, s) \coloneqq P_{r,s}.$$

En otras palabras, K se obtiene de la matriz P al tratarla como una función de dos argumentos (el índice del renglón y el índice de la columna).

En este tema denotemos por H al espacio de Hilbert con núcleo reproductor K. La existencia y unicidad de H se garantizan por el teorema de Moore–Aronszajn.

1 Proposición. *Sea $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $P > 0$. Entonces existe una matriz Q en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $Q > 0$ y $Q^2 = P$.*

Demostración. Usemos la descomposición espectral de la matriz P. Como P es una matriz estrictamente positiva, existe una matriz unitaria U y una lista de números $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tales que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ y

$$P = U \operatorname{diag}(\lambda) U^*.$$

Definimos $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$ mediante la regla $\rho_k \coloneqq \sqrt{\lambda_j}$. Aquí usamos las raíces cuadradas positivas de números positivos. Es fácil ver que $\rho \odot \rho = \lambda$, donde $\odot$ denota el producto por componentes de dos vectores:

$$\rho \odot \rho = \left[\sqrt{\lambda_j}\,\sqrt{\lambda_j}\right]_{j=1}^n = \left[\lambda_j\right]_{j=1}^n = \lambda.$$

Por las propiedades de las matrices diagonales, esto implica que $\operatorname{diag}(\rho)^2 = \operatorname{diag}(\lambda)$. Pongamos

$$Q \coloneqq U \operatorname{diag}(\rho) U^*.$$

Entonces $Q^* = Q$ y $\operatorname{Sp}(Q) = \{\rho_1, \ldots, \rho_n\} \subseteq [0, +\infty)$, así que $Q \geq 0$. Finalmente,

$$Q^2 = U \operatorname{diag}(\rho) U^* U \operatorname{diag}(\rho) U^* = U \operatorname{diag}(\lambda) U^* = P. \qquad \square$$

2 Observación. Se puede demostrar que para cada $P \geq 0$ existe una *única* matriz Q tal que $Q \geq 0$ y $Q^2 = P$. Esta matriz Q se denota por $P^{1/2}$.

3 Proposición. *Sea $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $P > 0$. Pongamos $X \coloneqq \{1, \ldots, n\}$ y definimos $K \colon X^2 \to \mathbb{C}$ mediante la regla*

$$K(r, s) \coloneqq P_{r,s}.$$

Denotemos por H al espacio de Hilbert con núcleo reproductor K. Entonces H es el espacio $\mathbb{C}^n$ con el producto interno

$$\langle a, b\rangle_H = \langle P^{-1}a, b\rangle.$$

Demostración. Para cada s en X, la función K_s está definida mediante la regla

$$K_s(r) = K(r, s) = P_{r,s}.$$

La función K_s se puede identificar con el vector

$$\big[P_{r,s}\big]_{r=1}^n,$$

es decir, con la s-ésima columna de la matriz P. Por la suposición, la matriz P es invertible. Esto implica que las columnas de la matriz P generan a todo el espacio $\mathbb{C}^n$. Como $K_1, \ldots, K_n \in H$, concluimos que $H = \mathbb{C}^n$.

Notamos que si $x \in \mathbb{C}^n$, entonces

$$\sum_{j=1}^n x_j K_j = \sum_{j=1}^n x_j P_{*,j} = Px.$$

Dados a, b en H, pongamos $x \coloneqq P^{-1}a$, $y \coloneqq P^{-1}b$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle a, b\rangle_H &= \left\langle \sum_{s=1}^n x_s K_s, \sum_{r=1}^n y_r K_r \right\rangle_H = \sum_{r,s=1}^n \overline{y_r} x_s \langle K_s, K_r\rangle_H = \sum_{r,s=1}^n \overline{y_r} x_s P_{r,s} \\ &= \sum_{s=1}^n \overline{y_r} (Px)_r = \langle Px, y\rangle = \langle P^{-1}Pa, P^{-1}b\rangle = \langle a, P^{-1}b\rangle = \langle P^{-1}a, b\rangle. \qquad \square\end{aligned}$$

4 Corolario. *Supongamos que se cumplen las suposiciones de la Proposición 3. Sea $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $Q > 0$ y $P = Q^2$. Definimos $T \colon \mathbb{C}^n \to H$ mediante la regla $T(x) \coloneqq Qx$. Entonces T es un isomorfismo isométrico de espacios de Hilbert.*

Demostración. En efecto, para cada x, y en $\mathbb{C}^n$,

$$\langle Tx, Ty\rangle_H = \langle Qx, Qy\rangle_H = \langle Px, y\rangle_H = \langle P^{-1}Px, y\rangle = \langle x, y\rangle. \qquad \square$$